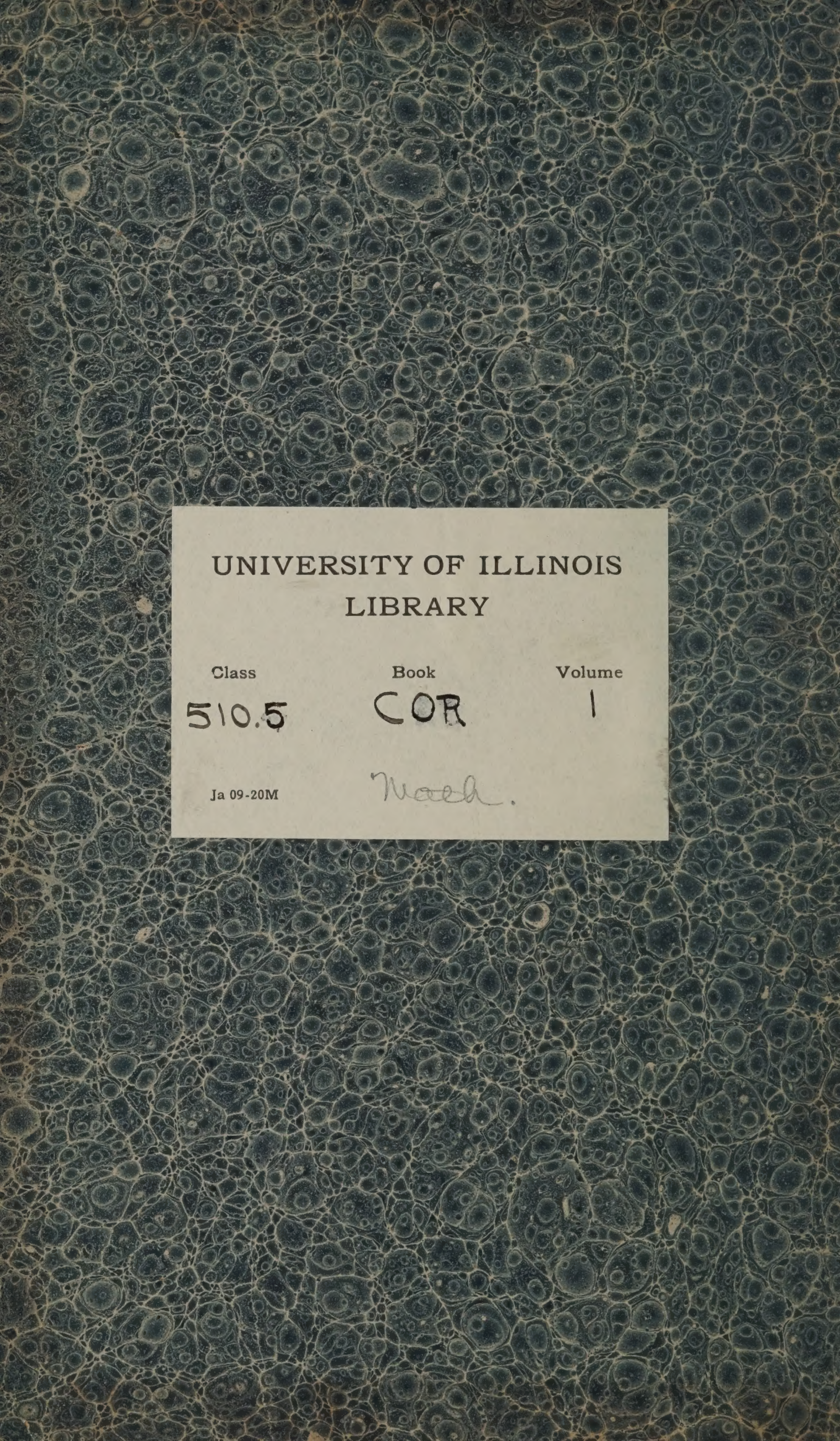
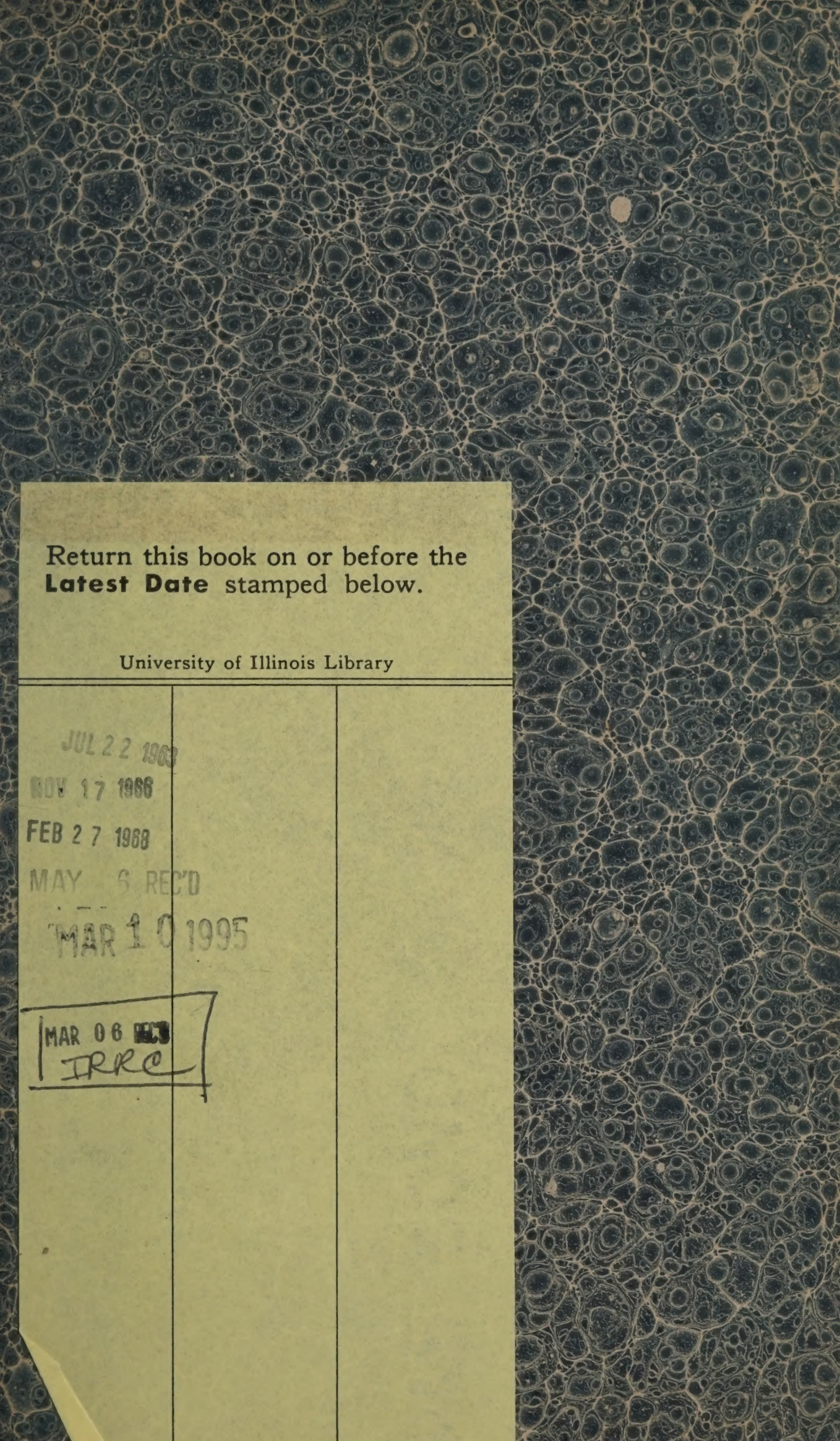



UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY
Class
Book
Volume
510.5
COR
1
Ja 09-20M
Math.



NOUVELLE

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE.

NOUVELLE
CORRESPONDANCE
MATHÉMATIQUE

PUBLIÉE PAR

EUGÈNE CATALAN,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DOCTEUR ÈS-SCIENCES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ETC.

ET

PAUL MANSION,
DOCTEUR SPÉCIAL EN SCIENCES MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

TOME PREMIER.

PREMIÈRE LIVRAISON. — AOUT 1874.

MONS,
HECTOR MANCEAUX, IMPRIMEUR-ÉDITEUR,
Rue des Fripiers, 4; Grand'Rue, 7.

1874.

NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE.

1re ANNÉE.

LISTE DES SOUSCRIPTEURS.

1. Angenot, Fernand, professeur de mathématiques, Bruul, 105, Malines.
2. Barrin, professeur au collége, Tongres.
3. Barzin, J.-B., professeur, Andenne.
4. Bergeron, Avenue des Tilleuls, 18, Chatou (Seine et Oise).
5. Bergmans, professeur à l'athénée royal, Gand.
6. Bibliothécaire de l'école normale, Nivelles.
7. Bosmans, B., professeur de mathématiques, rue de Bosingue, 9, Ypres.
8. Breithof, N., professeur à l'Université, rue du Canal, 54, Louvain.
9. Brocard, capitaine du génie, Alger.
10. Bruyère, directeur de l'Institution libre, Quiévrain.
11. Cambier, professeur de mathématiques à l'athénée royal, Mons.
12. Carnoy, Joseph, professeur, Louvain.
13. Charbo, J.-B., capitaine du génie, rue Josaphat, 104, Bruxelles.
14. Claessens, Léopold, professeur au collége Notre-Dame, Tournai.
15. Cleynhens, François, professeur au collége St-Rombaut, Malines.
16. Coppieters, Charles, professeur de mathématiques au collége St-Louis, rue Nord du Sablon, Bruges.
17. Corbière, J., élève de mathématiques au lycée de Montpellier (Hérault).
18. Cornet, F., ingénieur du Levant du Flénu, Cuesmes.
19. Dauge, professeur à l'Université, Gand.
20. Decq, E., libraire, rue de la Régence, 4, Liége. [5 *exempl.*]
21. Degive, Victor, professeur à l'athénée royal, Mons.
22. Dehousse, P., professeur, Quai Cockerill, 1, Liége.
23. De Laveleye, lieutenant d'artillerie, rue des Rentiers, 89, Etterbeek-lez-Bruxelles.
24. Delsaulx, Joseph, professeur, rue des Récollets, 11, Louvain.
25. Demoor, F., professeur, Nivelles.
26. De Roover, Dominique, professeur à l'école normale, St-Nicolas.

27. Descamps, professeur de mathématiques à l'athénée, Arlon.
28. De Tilly, Joseph-Marie, capitaine d'artillerie, rue Van Aa, 81, Ixelles.
29. Dewalque, professeur à l'Institut St-Remacle, Stavelot.
30. Dumoulin, Arthur, étudiant, rue Neuve, Huy.
31. Dusausoy, Clément, professeur à l'athénée, rue Flamande, 57, Bruges.
32. Even, Michel, professeur, Arlon.
33. Falisse, professeur à l'athénée, rue du Laveu, Liége.
34. Ferron, ingénieur, rue de l'Arsenal, Luxembourg.
35. Floquet, G., professeur de mathématiques au lycée, Belfort.
36. Forestier, C., professeur de mathématiques spéciales, rue Valade, 34, Toulouse.
37. Gary, Siméon, professeur à l'athénée, Tournai.
38. Gauthier-Villars, libraire, Quai des Augustins, 55, Paris. [24 *exempl.*]
39. Gerono, rue d'Enfer, 23, Paris.
40. Gilbert, Ph., professeur à l'Université, rue Notre-Dame, 20, Louvain.
41. Goblet, élève à l'école polytechnique, rue Boghem, 12, Schaerbeek.
42. Graindorge, répétiteur à l'école des mines, rue Duvivier, 20, Liége.
43. Guillaume (l'abbé), directeur du collége, Leuze.
44. Haton de la Goupillière, ingénieur des mines, rue Garancière, 8, Paris.
45. Hermite, Charles, rue de la Sorbonne, 2, Paris.
46. Hertoghe, professeur, Chaussée de Malines, 94, Anvers.
47. Hioux, professeur au lycée de St-Etienne.
48. Hoste, libraire-éditeur, Gand.
49. Houël, Jules, professeur à la Faculté des sciences, cours d'Aquitaine, 82, Bordeaux.
50. Humbert, Edmond, Quai du Châtelet, 24, Orléans.
51. Kramers, libraire, Rotterdam. [2 *exempl.*]
52. Laduron, professeur, Bruul, 8, Malines.
53. Laduron, Ch.-N. professeur au collége communal, Charleroi.
54. Laisant, capitaine du génie, Tlemcen (Algérie).
55. Lamarche, Louis, professeur à l'athénée, Bruxelles.
56. Lambert, Théophile, professeur, Dinant.
57. Laurent, Charles, professeur de mathématiques au lycée et à l'école des sciences, rue de la République, 130, Rouen.
58. Lecointe, professeur à l'athénée, Anvers.
59. Lemoine, Emile, ingénieur, rue Cherche-Midi, 55, Paris.
60. Lespiault, Gaston, professeur à la Faculté des sciences, Bordeaux.
61. Liagre, J.-B.-J., général commandant l'école militaire, Ixelles (Cambre).
62. Lignières, Clément, professeur de mathématiques au lycée de Poitiers.
63. Lombard, Charles, professeur de mathématiques au lycée, rue du Cimier, 3, Tours (Indre et Loire).
64. Loppens, professeur à l'athénée royal, Faubourg de Salzinne, Namur.
65. Lorrain, directeur du collége communal, Verviers.
66. Loxhay, rue de l'Arbre bénit, 95, Bruxelles.

67. Lucas, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Moulins (Allier).
68. Manderlier, E., professeur, Quai aux Tilleuls, 6, Gand.
69. Marquet, Jean, professeur de mathématiques, rue St-Dominique, 2, Mans (Sarthe).
70. Mathieu, professeur au pensionnat de Malonne.
71. Mayolez, G., libraire, rue de l'Impératrice, 13, Bruxelles.
72. Médulfus, professeur de mathém. à l'établissement de Carlsbourg (Paliseul).
73. Niewenglowski-Boleslas, professeur de mathématiques spéciales, Rheims.
74. Novent, L , préfet des études du collége, Tirlemont.
75. Pallemaerts, Bernard, professeur, Huy.
76. Pasquier, Ernest, professeur à l'Université, rue de Tirlemont, 80, Louvain.
77. Passau, professeur à l'athénée royal, Arlon.
78. Peny, Camille. capitaine d'état-major, rue St-Gilles, 4, Bruxelles.
79. Peyras, professeur au Lycée de Rodez (Aveyron).
80. Philippin, Louis, élève à l'école normale des sciences, rue Charles-Quint, 84, Gand.
81. Phillips, Edouard, membre de l'Institut, rue Marignan, 27, Paris.
82. Picquet, avocat, rue de Nimy, Mons.
83. Polydore, professeur à l'Institution des Joséphites, Grammont.
84. Postula, Henri, professeur de mathémat., faubourg St-Laurent, 81, Liége.
85. Quetelet, Ernest, Observatoire royal, Bruxelles.
86. Rebière, Michel-Alphonse, professeur de mathématiques, rue de Fontaine, 4, Dijon (Côte d'Or).
87. Retsin, François, professeur à l'athénée, Quai des Moines, 48, Gand.
88. Ribot, Alexandre, professeur de mathématiques spéciales, rue Basse, 33, Caen (France).
89. Saltel, Louis, professeur, Fontenay-le-Comte (Vendée, France).
90. Schmit, professeur, Chaussée de Charleroi, 73, Bruxelles.
91. Schobbens, médecin, rue de l'Empereur, Anvers.
92. Schoentjes, Henri, professeur, rue Charles-Quint, 24, Gand.
93. Secrétaire de la Faculté des sciences, Lille.
94. Seron, Joseph, étudiant, rue Fusch, 11, Liége.
95. Seutin, instituteur, Thoricourt.
96. Simons, Pierre, professeur, rue Goffart, 11, Ixelles.
97. Smiets, professeur de mathématiques au collége communal, Huy.
98. Souillard, profes. à la Faculté des sciences, rue Fontaine Delsaux, 20, Lille.
99. Standaert, Adolphe, professeur de mathématiques supérieures, Thuin.
100. Straetmans, Gérard, élève à l'école normale des sciences, Eben-Emaek (Limbourg).
101. Supérieur du pensionnat de Melle-lez-Gand.
102. Tangre, F., étudiant, collége Marie-Thérèse, Louvain.
103. Transon, Abel, rue de Tournon, 8, Paris.
104. Tricot, H., professeur au collége, Enghien.
105. Van Aubel, H., profes. à l'athénée, Avenue Quentin Mazzys, 20, Anvers.

106. Van Heugen, N., préfet des études du collége communal, Ypres.
107. Van Rysselberghe, professeur, rue Longue, 94, Ostende.
108. Vermast, supérieur du collége, Termonde.
109. Verstraeten, professeur à l'Université, Gand.
110. Ward, John, ingén. à la C^e des bassins houillers, rue Royale, 60, Bruxelles.
111. Waxweiler, rue Grœninghe, 16, Bruges.
112. Willière, professeur à l'athénée royal, Mons.

AVERTISSEMENT.

Toutes les personnes qui s'occupent de mathématiques savent que le regrettable M. Quetelet avait fondé, en 1825, un recueil périodique intitulé : *Correspondance mathématique et physique.* Ce recueil exerça la plus salutaire influence sur le mouvement scientifique de l'époque : il établit des relations entre les savants belges et ceux des pays voisins, assura une prompte publicité à leurs travaux, et fit apprécier le mérite de plusieurs géomètres qui, jusqu'alors, n'avaient guère eu le moyen de se faire connaître [1].

Malheureusement, l'illustre Secrétaire perpétuel de l'Académie de Bruxelles dut, en 1839, abandonner la publication de son journal, pour donner tous ses soins à la savante Compagnie dont il a été l'âme pendant près de quarante ans. Depuis lors, il n'existe plus, en Belgique, de publication périodique spécialement consacrée aux sciences mathématiques. L'Académie, il est vrai, accueille avec bienveillance les essais des jeunes géomètres ; mais ses *Bulletins* et ses *Mémoires* ne peuvent guère s'ouvrir qu'aux recherches originales : ils ont pour but l'*extension* de la science, plutôt que sa *diffusion ;* et, par suite, ils ne répondent pas à tous les besoins. En outre, ces recueils, où sont réunis des travaux relatifs à toutes les branches du savoir humain, ne peuvent être aussi répandus que le serait un *journal* consacré aux progrès d'une *seule* science.

Les réflexions précédentes, déjà anciennes, nous ont suggéré l'intention de publier une *Nouvelle Correspondance mathématique.*

---

[1] Pour justifier cette assertion, il suffit de rappeler que la *Correspondance mathématique et physique* contient des travaux originaux de *Ampère*, *Bobillier*, *Bouvard*, *Chasles*, *Dandelin*, *Encke*, *Garnier*, *Gergonne*, *Gerono*, *Gloesener*, *Hachette*, *Lobatto*, *Noël*, *Pagani*, *Plana*, *Plateau*, *Poncelet*, *Pontécoulant*, *Prony*, *Quetelet*, *Steichen*, *Stern*, *Timmermans*, *Verhulst*, etc.

Notre future entreprise avait reçu l'approbation du Secrétaire de l'Académie ; et, si la mort ne l'avait ravi à la Belgique et à la science, notre journal aurait paru sous son patronage. Privés des conseils de M. Quetelet, nous tâcherons, néanmoins, que le nouveau recueil soit digne de l'ancien, et qu'il soit favorablement accueilli par les Professeurs et les Élèves.

La *Correspondance* s'occupera, principalement, des parties de la science mathématique enseignées (ou qui devraient être enseignées) dans les établissements d'instruction moyenne et dans les cours relatifs à la *Candidature* [1]. Nous essaierons, en particulier, de vulgariser la connaissance des parties les moins abstraites de la géométrie supérieure et de l'algèbre moderne.

Nous publierons dans notre Revue : 1° des articles originaux sur les méthodes ; 2° des solutions de questions choisies ; 3° des analyses, extraits, comptes-rendus et traductions de mémoires ou d'ouvrages ; de manière à tenir nos lecteurs au courant de la science, autant que le permet le cadre de notre recueil.

« Quand il s'agira d'articles élémentaires, nous tâcherons « d'éviter les répétitions fastidieuses d'objets trop connus. « Car, s'il est bon de revenir de temps à autre sur les éléments « des sciences, il faut que ce soit pour les perfectionner et non « pour y changer çà et là quelques mots et quelques phrases » (LIOUVILLE). Quant aux travaux de mathématiques supérieures, nous serons forcés de refuser ceux qui, par leur caractère même, figureraient mieux dans les recueils académiques.

Entre ces deux limites, nous accueillerons avec plaisir tous les articles intéressants qu'on voudra bien nous envoyer.

E. CATALAN.
P. MANSION.

---

[1] Ce grade répond à ce que l'on appelle, en France, la *Licence*.

NOUVELLE
CORRESPONDANCE
MATHÉMATIQUE.

PROBLÈME SUR LE CERCLE.

Décrire une circonférence O, *qui passe par un point donné* A, *et qui touche deux droites* MN, PQ(¹).

1. On ramène ordinairement la solution de ce problème à celle du problème équivalent : « *Décrire une circonférence* O, *qui passe par deux points donnés* A *et* A', *et qui touche une droite donnée* MN, A' étant le point symétrique de A, par rapport à l'axe de symétrie CD des droites données. (CATALAN, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 3e édition, livre III, 31.) On peut aussi ramener cette seconde question à la première, et résoudre directement celle-ci, de la manière suivante.

Construisons une circonférence quelconque, tangente aux droites MN, PQ, et située dans l'angle de ces droites qui contient le point A. Soit B le point de contact de cette circonférence avec la droite MN.

Joignons le point A, au point de rencontre des droites MN, PQ. Supposons que cette droite rencontre la circonférence auxiliaire en deux points E, F. Joignons les points B et E, B et F ; puis menons AG parallèle à BE et coupant MN en G, AH parallèle à BF et coupant MN en H.

Les circonférences passant par A et G, ou A et H, et tangentes à MN sont, chacune, une solution de la question.

La démonstration est trop facile pour que nous nous y arrêtions.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure, pour tous les articles où elle n'accompagne pas le texte.

2. On peut résoudre de la même manière une question beaucoup plus générale :

Étant donnés une figure f *et un point* A, *construire une figure* F *passant par* A *semblable à* f *et semblablement placée par rapport à un certain point* C, *pris pour centre de similitude.*

On joint le point A au point C. Soit a un point d'intersection de AC avec f ; le rapport de similitude des figures f et F sera égal à

$$\frac{Ca}{CA}.$$

Ce rapport étant connu, on construira facilement la figure F.

Comme cas particulier, nous signalons au lecteur le problème suivant : *Construire une ellipse semblable à une ellipse donnée en grandeur et en position, tangente à deux droites données, et passant par un point donné.*

P. Mansion.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS PÉRIODIQUES (1).

1. *Si le nombre entier* n *n'est divisible ni par* 2, *ni par* 5, *ni par* 3, *la fraction* $\frac{1}{n}$ *est équivalente à une fraction périodique simple dont la période* abc...f *forme un nombre divisible par* 9.

On a

$$\frac{1}{n} = \frac{abc\ldots.f}{999\ldots.9},$$

ou

$$999\ldots.9 = n\,(abc\ldots f).$$

(1) Les théorèmes qui suivent sont probablement des cas particuliers de théorèmes démontrés en 1842 par M. Catalan, dans les *Nouvelles annales de mathématiques*. Nous les publions parce qu'ils sont peu connus sous leur forme actuelle (P.M.).

Le nombre n étant premier avec 9, qui divise le premier membre de cette égalité, $abc\ldots f$ est divisible par 9.

2. *La somme des périodes des fractions périodiques équivalentes à* $\frac{k}{n}$, $\frac{n-k}{n}$, *est* 999....9.

En effet,

$$1 = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = \frac{a'b'c'\ldots.f'}{999\ldots.9} + \frac{a''b''c''\ldots.f''}{999\ldots\ldots9},$$

si $a'b'c'$ .... f', $a''b''c''$.... f'' sont les périodes des fractions périodiques : $\frac{k}{n}$, $\frac{n-k}{n}$; périodes sont respectivement égales à k $(abc\ldots.f)$ et $(n-k)$ $(abc\ldots.f)$.

3. *Si la période de la fraction périodique équivalente à* $\frac{1}{n}$ *contient* $(n-1)$ *chiffres, le nombre formé par la première moitié des chiffres de la période, ajouté au nombre formé par la seconde moitié de ces chiffres, est* 99....9, *le nombre des* 9 *étant* $\frac{n-1}{2}$.

Exemple. On a :

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857 \quad 142857\ldots,$$

$$142 + 857 = 999.$$

Démonstration. Pour plus de simplicité, supposons que n soit compris entre 10 et 100.

1° Les restes partiels, dans la division qui donne la fraction périodique, seront, dans un certain ordre :

$$1, 2, 3, \ldots (n-1);$$

les dividendes correspondants sont :

$$10, 20, 30, \ldots.\ 10(n-1).$$

En particulier, le premier reste est 10 et le dernier est 1, puisqu'en multipliant ce dernier reste par 10, on doit recommencer la série d'opérations qui a conduit à la première période.

2° Considérons deux dividendes partiels :

$$10r,\ 10(n-r).$$

Soient :

$$\frac{10r}{n} = q' + \frac{r'}{n},\quad \frac{10(n-r)}{n} = q'' + \frac{r''}{n}.$$

Il est clair que l'on a :

$$10 = \frac{10r + 10\,(n-r)}{n} = q' + q'' + \frac{r'+r''}{n}.$$

r', r'' sont plus petits que n et plus grands que 0 ; $\frac{r'+r''}{n}$ est entier ; donc

$$\frac{r'+r''}{n} = 1,\ q' + q'' = 9\ ;$$

ou,

$$r'' = n - r',\ q'' = 9 - q^1.$$

3° Supposons que les restes 1, 2, 3,.... $(n-1)$, se présentent dans l'ordre suivant :

$$r_1 = 10,\ r_2,\ r_3, \ldots, r_{n-1} = 1,$$

et que le p^{ième} de ces restes soit égal à $n-1$. D'après le 2°, la série des restes :

$$r_1,\ r_2, \ldots.\ r_p = n - 1,$$

sera suivie de la série des restes :

$$n-r_1,\ n-r_2, \ldots,\ n - r_p = n - (n-1) = 1.$$

Le $(2\,p)^{\text{ième}}$ reste est donc égal à 1 ; par conséquent,

$$2p = n - 1;$$

ou

$$p = \frac{n-1}{2}.$$

Les quotients correspondants aux deux séries de restes sont respectivement :

$$q_1,\ q_2, \ldots,\ q_p,$$
$$9 - q_1,\ 9 - q_2, \ldots,\ 9 - q_p;$$

d'après le 2°. On a donc :

$$q_1 + (9 - q_1) = 9,$$
$$q_2 + (9 - q_2) = 9,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$q_p + (9 - q_p) = 9;$$

ce qui démontre le théorème.

4. Le même théorème subsiste pour les fractions décimales périodiques équivalentes à :

$$\frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots\ \frac{n-1}{n},$$

où la période a les mêmes chiffres que dans la fraction périodique équivalente à $\frac{1}{n}$, les chiffres de la période de cette dernière fraction devant seulement être permutés circulairement, pour donner la période de $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, etc.

(*Extrait d'une lettre de* M. TH. SCHOBBENS[1].)

5. On peut rapprocher, du premier des théorèmes précédents, un théorème curieux de M. J. PLATEAU, notre éminent physicien.

Un nombre impair quelconque n, *non terminé par* 5, *a un multiple de la forme* 111....1, *le nombre des* 1 *étant convenablement choisi.*

Exemples :

$$7 \times 15873 = 111111,$$
$$33 \times 3367 = 111111.$$

Supposons d'abord que le nombre n ne soit pas divisible par 3. Réduisons $\frac{1}{n}$ en fraction périodique ; soit $abc....f$ la période. Nous aurons :

$$\frac{1}{n} = \frac{abc....f}{999....9},$$
$$n\,(abc....f) = 999...9,$$
$$n \times \frac{abc....f}{9} = 111....1,$$

ce qui démontre le théorème.

Supposons, en second lieu, que n soit divisible par 3 ou par 9; par 3, par exemple. Représentons par P la période $abc...f$, et supposons qu'elle ait p chiffres. Nous aurons encore :

$$999....9 = \mathrm{P} \times n.$$

Puisque n est divisible par 3, P est divisible par 3 ; par suite

$$\mathrm{N} = abc...f\;abc....f\;abc....f$$

est divisible par 9. En effet, P a pour somme de ses chiffres un nombre divisible par 3 ; donc N a pour somme de ses chiffres un nombre divisible par 9.

---

(1) Docteur en médecine, à Anvers.

On aura :

$$10^{3p} - 1 = \mathrm{N} \times n,$$

et par conséquent :

$$111....1 = \frac{\mathrm{N}}{9} \times n.$$

Le nombre N, formé de la réunion de 3 périodes P, divisé par 9 et multiplié par n, donne donc un nombre formé d'une suite de 1.

6. Voici l'énoncé d'un théorème analogue et beaucoup plus général, dû à Crelle (*Journal de Crelle*, t. 5, p. 296; *Annales de Gergonne*, t. 20, p. 349 et 304) : « *Un nombre donné quelconque est toujours diviseur d'un autre nombre exprimé par des périodes de chiffres donnés, suivies d'un certain nombre de zéros.* » Soit, par exemple, la période donnée 4813. Il n'est aucun nombre qui ne soit diviseur d'un nombre de la forme :

4813 4813....481348130000....0000,

pourvu qu'on y fasse varier, d'une manière convenable, le nombre des périodes et celui des zéros.

P. M.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\mathrm{I} = \int_0^\pi l\,(1-2a\cos x + a^2)\,dx$.

Les valeurs de I ont été trouvées par Poisson (*Journal de l'école polytechnique,* 9ᵉ cahier, p. 617) ; mais ce grand géomètre a commis, dans sa démonstration, une singulière inadvertance :

« Soit » dit Poisson,

$$« u = \log\,(1-2a\cos x + a^2)\ ; \qquad (1$$

« d'où l'on tire :

$$« -a\frac{du}{da} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} - 1.$$

« Pour fixer les idées, supposons $a < 1$; nous aurons, en « série convergente,

$$« \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} = 1 + a\cos x + a^2\cos 2x + a^3\cos 3x + \ldots$$

« . . . . »

Or, *la dernière égalité est fausse.* En effet, la multiplication par le diviseur donne, au lieu du premier membre, $1-a\cos x$.

On peut, comme il suit, rectifier le calcul de Poisson.

$$\frac{du}{da} = 2\,\frac{a - \cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{2}{a}\,\frac{1 - \frac{1}{a}\cos x}{1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}}.$$

Si a *surpasse l'unité*, on a, par ce qui précède :

$$\frac{1 - \frac{1}{a}\cos x}{1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}} = 1 + \frac{1}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\cos 2x + \frac{1}{a^3}\cos 3x \ldots$$

donc

$$\frac{du}{da} = 2\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\cos x + \frac{1}{a^3}\cos 2x + \frac{1}{a^4}\cos 3x + \ldots\right];$$

puis :

$$u - C = 2\left[la - \frac{1}{a}\cos x - \frac{1}{2a^2}\cos 2x - \frac{1}{3a^3}\cos 3x + \ldots\right] \quad (2)$$

Pour déterminer la constante C, supposons $a = 1$; nous aurons :

$$u = l\,(2 - 2\cos x) = 2\,l\left(2\sin\frac{1}{2}x\right),$$

$$2l\left(2\sin\frac{1}{2}x\right) - C = -2\left[\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots\right]$$

Mais, par une formule connue [1],

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots = -\,l\left(2\sin\frac{1}{2}x\right);$$

donc la constante C est nulle ; et l'on a :

$$\int_0^\pi u\,dx = \int_0^\pi \log\,(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 2\pi la. \qquad (a > 1).$$

Le reste est facile.

E. Catalan.

---

[1] *Traité élémentaire des séries*, p. 106.

SUR UN NOUVEAU MODE DE GÉNÉRATION DES CONIQUES,

DU A M. ABEL TRANSON.

M. Abel Transon a publié, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1873, p. 5-20), un nouveau mode de génération des coniques, que nous croyons utile de faire connaître à nos lecteurs. La démonstration des théorèmes de M. Transon peut se faire de diverses manières. Nous nous contenterons ici de donner une idée de la méthode de l'auteur lui-même, en démontrant le dernier de ses théorèmes. Cette méthode prend de jour en jour une extension plus grande, sous le nom de *géométrie directive*, *méthode des équipollences, théorie des quaternions.*

I.

1. Soient, sur une droite indéfinie IJ, deux points fixes F et G.

On peut regarder la portion de droite FG comme une ellipse dont les foyers et les sommets sont F, G; car, pour tout point M compris entre F et G, on a

$$FM + MG = \textit{constante}.$$

Les droites indéfinies IF, GJ peuvent être regardées, au contraire, comme une hyperbole dont les foyers et les sommets sont F et G.

Enfin, si O est le milieu de FG, la droite OJ seule, ou la droite OI seule, est une parabole dont le sommet ou le foyer est O, et dont la directrice est une perpendiculaire, en O, à la droite IJ.

2. A partir du point M, pris sur la droite FG, et sur une perpendiculaire à celle-ci, portons une longueur Mm, égale à la moyenne proportionnelle entre FM et MG. Le lieu du point m est un cercle ayant OF pour rayon, quand le point M parcourt FG; une hyperbole équilatère ayant FG pour axe, quand M parcourt IF et GJ. Les points F et G sont les sommets de ces deux coniques.

Si l'on porte, à partir de chaque point M de OI ou OJ, sur

une perpendiculaire à IJ, une longueur Mm égale à la moyenne proportionnelle entre MO et une longueur constante $2p$, le lieu du point m est une parabole dont le sommet est O.

Les équations :

$$y^2 = a^2 - x^2, \qquad y^2 = x^2 - a^2, \quad y^2 = 2px,$$

sont la traduction analytique de cette construction, pourvu que FG $= 2a$.

3. Si, au lieu de prendre, comme dans le numéro précédent, Mm égal à la moyenne proportionnelle dont on a parlé plus haut, on prend une longueur égale à k fois cette moyenne proportionnelle, et si l'on incline cette longueur d'un angle constant v sur la droite IJ, on obtient, pour le lieu du point m, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, dont les équations, en coordonnées obliques, sont :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad y^2 = 2p'x;$$

pourvu que l'on fasse

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ ou } k^2 = \frac{2p'}{2p}.$$

Les tangentes aux coniques qui correspondent à diverses valeurs de k et de v, en des points situés sur une droite Mm issue du point M, se coupent sur IJ (que l'on peut regarder comme la tangente, en M, au lieu primitif) en un point D, qui est le conjugué harmonique de M, par rapport à F et G.

4. Considérons maintenant une ellipse quelconque, ayant F, G pour foyers. Portons, à partir de chaque point M de cette ellipse, sur une droite faisant un angle constant v avec la normale à la courbe, une longueur Mm égale à k fois la moyenne proportionnelle entre FM et GM. Le lieu du point m est une ellipse concentrique à la première ; de plus, les tangentes à des ellipses correspondant à diverses valeurs de k et de v, en des points situés sur une droite issue du point M, se coupent en un point D, situé sur la tangente en M à la courbe primitive, et dont la position ne dépend que de M, F et G.

Des théorèmes semblables existent pour l'hyperbole et la parabole. Ils constituent, avec le précédent, le nouveau mode de génération des coniques, dont celui qui est donné plus haut, aux numéros 2 et 3, est un cas particulier.

5. On peut encore généraliser ce qui précède. Considérons une courbe plane quelconque et deux points fixes, F et G, dans son plan. A partir de chaque point M de cette courbe, et sur une droite faisant un angle constant v avec la bissectrice de l'angle FMG, portons une longueur égale à k fois la moyenne proportionnelle entre FM et GM. On déduira ainsi, de la première courbe, autant de *transformées* que l'on voudra, en faisant varier k et v.

Les tangentes à ces transformées, en des points correspondant au point M de la courbe primitive, se coupent sur la tangente en M à celle-ci, en un point D, dont la position ne dépend que de M, F et G.

Nous allons donner la démonstration de ce dernier théorème par la *géométrie directive* ou *méthode des équipollences*.

II.

1. Soient $(x_1\ y_1)$ et (x_2, y_2) les coordonnées rectangulaires de deux points A, B; φ, l'angle de la direction AB avec l'axe OX. On a:

$$x_2 - x_1 = \text{AB} \cos \varphi, \quad y_2 - y_1 = \text{AB} \sin \varphi.$$

Posons :

$$i = \sqrt{-1}, \quad \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

$$\overline{\text{AB}} = \text{AB}e^{i\varphi} = \text{AB} \cos \varphi + i\text{AB} \sin \varphi$$

$$= (x_2 - x_1) + i\,(y_2 - y^1).$$

L'expression $\overline{\text{AB}}$ fera connaître AB en grandeur et en direction. En effet, quand cette expression est donnée, on peut en séparer la partie réelle, AB $\cos \varphi$, de la partie imaginaire iAB $\sin \varphi$; puis en déduire la valeur de AB et celle de φ, c'est-à-dire AB en grandeur et en direction.

2. Il est clair que

$$\overline{\text{AB}} = -\overline{\text{BA}};$$

car, si AB fait un angle φ avec OX, BA fait avec cette direction un angle égal à $\pi + \varphi$; et, par suite :

$$\overline{\text{BA}} = \text{BA} \cos (\pi + \varphi) + i\text{BA} \sin (\pi + \varphi)$$

$$= -\text{AB} \cos \varphi - i\text{AB} \sin \varphi,$$

ou

$$\overline{\text{BA}} = -\overline{\text{AB}}.$$

Pour trois points ABC, on a les relations suivantes, faciles à démontrer :

$$\overline{\text{AB}} + \overline{\text{BC}} = \overline{\text{AC}},$$

$$\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AC}} - \overline{\text{BC}} = \overline{\text{CB}} - \overline{\text{CA}}.$$

3. Supposons que φ, ψ, φ', ψ' soient les inclinaisons de AB, CD, A'B', C'D' sur l'axe des x, et que l'on ait :

$$AB \times CD = A'B' \times C'D', \quad \varphi + \psi = \varphi' + \psi'.$$

On pourra, au lieu de ces deux égalités, écrire simplement :

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{A'B'} \times \overline{C'D'},$$

d'après les règles du calcul des imaginaires.

Il résulte de là que la relation :

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = (\overline{EF})^2$$

est équivalente à celles-ci :

$$AB \times CD = (EF)^2, \; \varphi + \psi = 2\theta ;$$

θ étant l'angle de EF avec OX. Si, en particulier, A, C, E coïncident, ou si

$$\overline{AB} \times \overline{AD} = (\overline{AF})^2,$$

AF est moyenne proportionnelle entre AB et AD; le point F est sur la bissectrice de l'angle DAB et sur l'arc de cercle BD, capable d'un angle égal à la moitié de BAD: c'est ce que l'on voit. en remarquant que les triangles ABF, AFD sont semblables.

4. Soit M un point quelconque d'une courbe dont l'équation est $y = \varphi(x)$. On aura, en posant $R = \overline{OM}$, O étant l'origine des coordonnées :

$$R = x + iy = x + i\varphi(x) \,; \; \frac{dR}{dx} = 1 + i\varphi'(x).$$

Soit :

$$\frac{dR}{dx} = se^{it} = s \cos t + is \sin t.$$

On aura :

$$s \cos t = 1, \; s \sin t = \varphi'(x), \; \text{tang}\, t = \varphi'(x).$$

L'angle t donne donc l'inclinaison de la tangente à la courbe sur l'axe des x.

Portons, à partir du point M, une longueur MT sur la tangente ; cette longueur MT fait un angle t avec l'axe des x ; par suite, si l'on suppose $MT = sL$:

$$\overline{MT} = MTe^{it} = Lse^{it} = L\frac{dR}{dx}.$$

On a aussi

$$\overline{OT} = \overline{OM} + \overline{MT} = R + L\frac{dR}{dx}.$$

La dernière expression détermine la position d'un point quelconque T de la tangente MT en M, à la courbe.

5. Considérons maintenant sur l'axe des x, deux points F, G dont les abcisses soient $(-c)$ et $(+c)$. Nous aurons (n° 2) :

$$\overline{GM} = \overline{OM} - \overline{OG} = R - c \, ; \, \overline{FM} = \overline{FO} + \overline{OM} = R + c.$$

Soit

$$\overline{Mm} = ke^{iv} \sqrt{\overline{FM} \times \overline{GM}} = ke^{iv} \sqrt{R^2 - c^2} \, :$$

Mm sera, d'après le numéro 3, une longueur égale à k fois la moyenne proportionnelle entre FM et GM, et faisant un angle v avec la bissectrice de l'angle FMG.

Posons

$$r = \overline{Om};$$

nous aurons

$$r = \overline{OM} + \overline{Mm} = R + ke^{iv}\sqrt{R^2 - c^2}.$$

Soit t un point quelconque de la tangente en m, au lieu du point m. D'après le numéro 4,

$$\overline{Ot} = r + l\,\frac{dr}{dx},$$

l étant une partie de mt. Si l'on remplace r par sa valeur, il vient

$$\overline{Ot} = R + l\,\frac{dR}{dx} + ke^{iv}\left[\frac{R^2 - c^2 + lR\,\frac{dR}{dx}}{\sqrt{R^2 - c^2}}\right].$$

Il y a, sur toutes les tangentes analogues à mt, un point qui ne dépend, ni de la valeur de k, ni de celle de v, et qui se trouve par conséquent aussi sur MT. C'est le point D, pour lequel le coefficient de ke^{iv} s'évanouit : pour ce point

$$R^2 - c^2 + lR\,\frac{dR}{dx} = o, \quad l\,\frac{dR}{dx} = \frac{c^2}{R} - R\,;$$

et par suite,

$$\overline{OD} = R + l\,\frac{dR}{dx} = R + \frac{c^2}{R} - R = \frac{c^2}{R},$$

ou enfin,

$$\overline{OD} \times \overline{OM} = c^2 = (OF)^2 = \frac{(FG)^2}{4}. \qquad (E)$$

Quand les points M et D sont sur FG, on dit que ces points sont *conjugués harmoniques* par rapport à F et G. On peut employer la même dénomination pour exprimer la relation (E), entre les points MDFG, dans le plan des xy. Il est d'ailleurs facile par le numéro 3 de construire le point D.

P. M.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LIOUVILLE.

1. Dans le n° de février 1874 de son *Journal de Mathématiques*, M. Liouville a énoncé, sans en donner la démonstration, un théorème remarquable, relatif à l'intégrale définie

$$I = \int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right) dx,$$

où F désigne une fonction telle que I ait une valeur déterminée; et a, une constante réelle quelconque. Nous nous proposons de démontrer ici ce théorème. Pour cela, nous établirons d'abord un lemme fondamental; puis nous exposerons les divers cas du théorème de M. Liouville; enfin nous en donnerons quelques applications.

I.

Lemme fondamental.

2. Considérons un triangle OAM, dans lequel OM $= 1$, OA$= a = \cos\alpha$. Appelons x l'angle MOA, z l'angle supplémentaire de MAO. Je dis que l'on a :

$$\int_0^\pi F(\sin^2 z)(dz - dx) = 0\,; \qquad (1)$$

ou, plus explicitement,

$$\int_0^\pi F(\sin^2 z)\,dz = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\frac{dx}{dz}\,dz.$$

3. Pour démontrer l'égalité (1), exprimons géométriquement la différence

$$dz - dx,$$

en fonction de dz.

Soit m un point voisin de M, sur la circonférence décrite du point O, comme centre, avec OM comme rayon. On a :

$$\Delta x = \textit{angle}\ \mathrm{MO}m = \textit{arc}\ \mathrm{M}m,$$
$$\Delta z = \textit{angle}\ \mathrm{MA}m.$$

Ensuite, dans le triangle $\mathrm{MA}m$,

$$\frac{\mathrm{M}m}{\sin \mathrm{MA}m} = \frac{\mathrm{A}m}{\sin \mathrm{AM}m};$$

ou encore, successivement :

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{arc}\ \mathrm{M}m} \times \frac{\mathrm{arc}\ \mathrm{M}m}{\mathrm{angle}\ \mathrm{MA}m} \times \frac{\mathrm{angle}\ \mathrm{MA}m}{\sin \mathrm{MA}m} = \frac{\mathrm{A}m}{\sin \mathrm{AM}m}$$
$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{arc}\ \mathrm{M}m} \times \frac{\Delta x}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\sin \Delta z} = \frac{\mathrm{A}m}{\sin \mathrm{AM}m}.$$

Quand le point m se rapproche indéfiniment de M, les quantités

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{arc}\ \mathrm{M}m},\ \frac{\Delta x}{\Delta z},\ \frac{\Delta z}{\sin \Delta z},\ \mathrm{A}m,\ \mathrm{AM}m$$

tendent respectivement vers les limites

$$1,\ \frac{dx}{dz},\ 1,\ \mathrm{AM},\ \frac{\pi}{2} + \mathrm{OMA}.$$

La dernière égalité donne, par conséquent,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\mathrm{AM}}{\cos \mathrm{OMA}}.$$

Abaissons, du point O, une perpendiculaire OP sur MA ; nous aurons :

$$\cos \mathrm{OMA} = \mathrm{PM},$$
$$\frac{dx}{dz} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{PM}},\ dz - dx = \frac{\mathrm{PM}-\mathrm{AM}}{\mathrm{PM}}\ dz.$$

Donc

$$\int_0^\pi \mathrm{F}(\sin^2 z)(dz - dx) = \int_0^\pi \mathrm{F}(\sin^2 z)\ \frac{\mathrm{PM}-\mathrm{AM}}{\mathrm{PM}}\ dz.$$

3. Considérons deux valeurs de z, l'une z_1, inférieure à $\frac{\pi}{2}$, l'autre, z_2, égale à $\pi - z_1$. Soient M_1, M_2 les points correspondants, sur la circonférence ayant OM pour rayon ; P_1 et P_2 les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur AM_1 et AM_2.

Il est facile de voir que $\mathrm{P}_1\mathrm{M}_1 = \mathrm{P}_2\mathrm{M}_2$, comme moitiés de cordes égales. Mais $\mathrm{P}_1\mathrm{M}_1 = \mathrm{AM}_1 + \mathrm{AP}_1$, $\mathrm{P}_2\mathrm{M}_2 = \mathrm{AM}_2 - \mathrm{AP}_2$.

De plus,

$$AP_2 = AP_1.$$

Donc:

$$\frac{P_1M_1 - AM_1}{P_1M_1} = \frac{AP_1}{P_1M_1},$$

$$\frac{P_2M_2 - AM_2}{P_2M_2} = \frac{-AP_2}{P_2M_2} = -\frac{AP_1}{P_1M_1}.$$

On a aussi :

$$\sin^2 z_1 = \sin^2 (\pi - z_1) = \sin^2 z_2,$$
$$F(\sin^2 z_1) = F(\sin^2 z_2).$$

4. L'intégrale

$$\int_0^\pi F(\sin^2 z) \frac{PM - AM}{PM} dz$$

peut donc se décomposer en deux autres, égales et de signes contraires, comme limites de sommes d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires, savoir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2 z_1) \frac{P_1M_1 - AM_1}{P_1M_1} dz_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2 z_1) \frac{AP_1}{P_1M_1} dz_1,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(\sin^2 z_2) \frac{P_2M_2 - AM_2}{P_2M_2} dz_2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2 z_1) \frac{AP_1}{P_1M_1} dz_1.$$

L'égalité (1) est donc vérifiée.

5. On peut remplacer, dans l'égalité (1), $F(\sin^2 z)$, par $F(\cos^2 z)$, $F(\sin z)$, etc.; bref, par une fonction quelconque de z, qui prenne la même valeur pour $z = z_1$ et pour $z = \pi - z_1$. Mais cette remarque, en apparence très féconde, ne donne, en réalité, rien de plus que l'égalité (1), comme on peut le démontrer. Toutefois elle est utile, pour transformer rapidement certaines intégrales, que l'on pourrait ramener à la forme

$$\int_0^\pi F(\sin^2 z)(dz - dx)$$

mais qu'il vaut mieux étudier directement. Ainsi, par exemple,

$$\int_0^\pi F[z(\pi - z)](dz - dx) = 0,$$

quelle que soit la fonction F.

II.

Démonstration du théorème de M. Liouville.

6. *On peut toujours supposer* a *positif*. En effet, on a :

$$\int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx = \int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2}\right)dx;$$

comme on peut le voir, en posant

$$x = \pi - x',$$

puis remplaçant x' par x, ce qui est permis.

7. *Premier cas : a positif et inférieur à l'unité*. Dans le triangle MOA, abaissons, du point M, la perpendiculaire MQ sur OA, ou sur son prolongement. Nous aurons :

$$MQ = MA \sin z, \qquad MQ = OM \sin x = \sin x,$$

$$\overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 - 2OM.\,OA \cos x + \overline{OA}^2 = 1 - 2a\cos x + a^2.$$

Par conséquent,

$$\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\overline{MQ}^2}{\overline{MA}^2} = \sin^2 z,$$

$$F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right) = F(\sin^2 z),$$

$$\int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\,dx.$$

Quand x varie de 0 à α, puis de α à π, z varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, puis de $\frac{\pi}{2}$ à π. D'après le lemme,

$$\int_0^\pi F(\sin^2 z)\,dx = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\frac{dx}{dz}\,dz = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\,dz;$$

et enfin,

$$\int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\,dz:$$

cette égalité est le théorème de Liouville. On peut donc supposer, dans l'intégrale I, la constante $a = 0$, quand a, en valeur absolue, est inférieur à l'unité.

8. *Second cas : a égal à l'unité.* Dans ce cas, on trouve que $2\Delta z = \Delta x$ et que z varie de $\frac{\pi}{2}$ à π, quand x varie de 0 à π. On a donc :

$$I = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\, dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi F(\sin^2 z)\, dz$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi F(\sin^2 z)\, dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi F(\sin^2 z)\, dz.$$

Si l'on fait, dans l'une de ces dernières intégrales, $z = \pi - z'$, elle devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2 z')\, dz' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2 z)\, dz\,;$$

en l'ajoutant à l'autre, il vient :

$$I = \int_0^\pi F(\sin^2 z)\, dz.$$

Le théorème de Liouville est donc vrai pour $a = 1$.

On arrive au même résultat, sans considération géométrique, en faisant directement $a = 1$ dans l'intégrale I.

9. 3[e] *cas : a supérieur à l'unité.* Soit $a = \frac{1}{b}$, b étant plus petit que l'unité. On a, successivement :

$$\int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1 - 2a\cos x + a^2}\right) dx = \int_0^\pi F\left(b^2 \frac{\sin^2 x}{1 - 2b\cos x + b^2}\right) dx$$

$$= \int_0^\pi F(b^2 . \sin^2 z)\, dz,$$

ou, en remplaçant b, par sa valeur $\frac{1}{a}$:

$$I = \int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 z}{a^2}\right) dz, \quad a > 1.$$

On peut observer que, si l'on fait $a = 1$, dans la dernière formule on arrive à un résultat exact, identique à celui que l'on a trouvé au n° précédent, dans le second cas.

10. En résumé :

$$\text{(A)} \int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right) dx = \int_0^\pi F(\sin^2 x)\, dx, \quad a^2 < 1.$$

$$\text{(B)} \int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right) dx = \int_0^\pi F\left(\frac{\sin^2 x}{a^2}\right) dx, \quad a^2 > 1.$$

Nous avons mis x, à la place de z, dans le second membre, parce que cela n'a aucune influence. Les deux formules sont vraies et deviennent identiques, quand $a^2 = 1$.

III.

Applications.

11. Soit à déterminer l'intégrale,

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\, dx; \qquad a^2 \overline{\overline{<}}\, 1$$

qui a été trouvée autrefois par Poisson.

D'après le théorème de Liouville, elle est égale à celle que l'on obtient en faisant $a = 0$, c'est-à-dire, à

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

valeur donnée dans tous les manuels de calcul intégral (Frenet, *Exercices de calcul infinitésimal*, 1re édition, n° 354).

12. Soit encore à calculer (Frenet, n° 341),

$$I = \int_0^\pi l\,(1-2a\cos x+a^2)\, dx, \qquad a \overline{\overline{<}}\, 1.$$

On a, d'après les propriétés des logarithmes,

$$J = \int_0^\pi l\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right) dx = \int_0^\pi l\,(\sin^2 x)\, dx - I;$$

et, d'après le théorème de Liouville,

$$J = \int_0^\pi l\,(\sin^2 x)\, dx.$$

Donc l'intégrale I est nulle, comme l'a trouvé Poisson, par d'autres considérations (Comp. p. 12).

P. Mansion.

EXTRAITS ANALYTIQUES.

I.

Note sur les bissectrices des angles d'un triangle, par M. Désiré André. (*Nouv. Ann.*, *janvier* 1874, p. 10.)

Supposons connus ces théorèmes :

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle partage le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.

Le carré de la bissectrice d'un angle intérieur est égal au rectangle des deux côtés de cet angle, moins le rectangle des deux segments du côté opposé.

Par le procédé suivant, nous pourrons en déduire, immédiatement, les propositions analogues, relatives à la bissectrice extérieure.

Soient le triangle ABC et la bissectrice AD de l'angle extérieur A. Prenons, sur BA prolongé, une longueur AE égale à AC; puis tirons DE. Dans le triangle ainsi obtenu DBE, la bissectrice intérieure de l'angle D est DA, les côtés de cet angle sont égaux aux segments de la base de ABC, et les segments de la base BE égalent les côtés de l'angle BAC.

Appliquons à ce triangle les théorèmes énoncés ci-dessus, etc.

II.

On donne deux circonférences O et O' se coupant en D et C ; par D, on mène une sécante qui rencontre O en B et O' en B'. Trouver le lieu du point d'intersection M des droites OB et O'B' (1). *Solution par M.* Beaujeux. (*Nouv. Ann., janvier* 1874, p. 33.)

Les angles OBD, O'B'D sont respectivement égaux à ODB et O'DB'; donc l'angle OMO' est égal à ODO' ; par suite, le lieu de M est un arc de circonférence OCO'.

III.

On inscrit, à un cercle donné O, tous les triangles ABC dont deux côtés AB , AC sont respectivement parallèles à deux directions fixes ; on demande le lieu des centres des cercles inscrits et ex-

(1) Question du concours général de 1873, classe de troisième (France.)

inscrits à ces triangles. Solution par M. Raphael Henrique y Diaz, *étudiant à l'université de Liége*(1). (*Nouv. Ann. janvier* 1874, p. 31.)

Soient HH′, KK′ les diamètres de O perpendiculaires à AB, AC; et soit I le centre du cercle inscrit à ABC. Quand le point A parcourt l'arc HK (supposé moindre qu'une demi-circonférence), les droites BI, CI passent toujours par les points fixes K et H ; et comme les triangles HIK, HAK sont égaux, le point I décrit un arc de cercle, symétrique de l'arc HK par rapport à la droite HK. En considérant les autres positions du point A, et les centres des cercles ex-inscrits, on prouve aisément que le lieu complet se compose des quatre circonférences symétriques de O par rapport aux droites HK, HK′, H′K, H′K′.

IV.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873 (FRANCE).

Question de mathématiques élémentaires.

Par un point donné A, dans l'intérieur d'un cercle donné O, mener deux cordes BC, DE, qui se coupent sous un angle donné BAD $=2\alpha$, et dont le produit soit maximum ou minimum. On examinera en particulier le cas où le point donné est à l'extérieur du cercle (2).

Soient μ l'inclinaison de la bissectrice de l'angle BAD sur AD, a la distance OA, r le rayon de la circonférence O, M le produit des cordes BC et DE, H et K les milieux de ces droites.

On a :

$$\overline{BH}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OH}^2 = r^2 - a^2 \sin^2(\mu - \alpha),$$
$$\overline{DK}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OK}^2 = r^2 - a^2 \sin^2(\mu + \alpha).$$

---

(1) Question du Concours général de 1873, classe de Philosophie (FRANCE).

(2) La solution de M. *Brillouin*, qui a remporté le premier prix, a été publiée dans les *Nouvelles Annales*, janvier 1874, p. 25.

Celle que nous donnons ici n'en diffère que par quelques simplifications.

Multipliant ces valeurs l'une par l'autre et tenant compte des relations :

$$\mathrm{Sin}^2(\mu+\alpha)+\sin^2(\mu-\alpha) = 1 - \cos 2\alpha \cos 2\mu,$$

$$\sin(\mu+\alpha)\sin(\mu-\alpha) = \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\mu}{2},$$

on trouve

$$M^2 = 4r^2(r^2-a^2)\sin^2 2\alpha + [a^2\cos 2\mu + (2r^2-a^2)\cos 2\alpha]^2.$$

Lorsque le point A est à l'intérieur du cercle, on obtient la variation complète de M^2 en faisant croître μ de 0 à 180° ; alors $\cos 2\mu$ varie, d'abord de $+1$ à -1, puis de -1 à $+1$. Par conséquent, si l'on pose

$$P = a^2\cos 2\mu + (2r^2-a^2)\cos 2\alpha,$$

$$P_1 = a^2 + (2r^2-a^2)\cos 2\alpha,$$

$$P_2 = -a^2 + (2r^2-a^2)\cos 2\alpha,$$

la quantité P varie de P_1 à P_2, puis de P_2 à P_1. Comme M dépend du carré de P, il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que P_2 est positif ou négatif.

Premier cas : $\cos 2\alpha \geqq \frac{a}{2r^2-a^2}$.

La variable P étant toujours positive, le maximum et le minimum de M ont lieu en même temps que ceux de P et correspondent, respectivement, à $\mu=0$ et à $\mu=90°$.

Second cas : $\cos 2\alpha < \frac{a}{2r^2-a^2}$.

Comme P change de signe, cette quantité s'annule lorsque

$$\cos 2\mu = -\frac{2r^2-a^2}{a^2}\cos 2\alpha.$$

Cette équation donne, pour μ, deux valeurs moindres que 360° ; soient $180°-2\mu_1$ et $180°+2\mu_1$ ces angles. Nous pouvons former le tableau suivant de la variation de P^2 :

$\mu =$	0,	$90°-\mu_1$,	90°,	$90°+\mu_1$,	180°
$P^2 =$	P_1^2,	0,	P_2^2,	0,	P_1^2.

Concluons de là que M passe par deux maximums, lorsque $\mu=0$ et $\mu=90°$, et par deux minimums, lorsque $\mu = 90° \mp \mu_1$.

Supposons maintenant le point A extérieur au cercle. Soit 2β l'angle des deux tangentes issues de A. Pour que deux droites, menées par A et faisant entre elles l'angle 2α, rencontrent toutes deux la circonférence, on doit avoir $\alpha < \beta$ et $\mu < \beta - \alpha$; par conséquent, nous ne ferons varier μ qu'entre 0 et $\beta - \alpha$. Quand $\mu = \beta - \alpha$, on a

$$P = a^2 \cos 2 (\beta - \alpha) + (2r^2 - a^2) \cos 2 \alpha;$$

ou, à cause de $r = a \sin \beta$:

$$P = a^2 \sin 2\beta \sin 2\alpha.$$

Ce résultat montre que P est toujours positif. Donc M est maximum pour $\mu = 0$, minimum pour $\mu = \beta - \alpha$.

NEUBERG.

V.

SUR LE THÉORÈME DE DANDELIN.

—

1. — *Lemme.* « Soit une circonférence de rayon r, dont le centre O est à la distance $a > r$ d'une droite donnée; toutes les circonférences qui ont leurs centres sur la droite et qui coupent orthogonalement la première, se rencontrent en un même point placé sur la perpendiculaire abaissée du centre O sur la droite et à une distance de celle-ci, égale à $\sqrt{a^2 - r^2}$. » Cette propriété s'étend sans peine à la sphère.

2.— Cela posé, considérons un cône de révolution coupé, par un plan S, suivant une conique C. Les sphères inscrites au cône, de manière à toucher le plan S, ont pour lignes de contact avec le cône des circonférences dont les plans P et P' coupent S suivant les directrices d et d' de la conique, et pour points de contact avec S, les foyers f et f'. (Théorème de DANDELIN, *Briot*, G. A. nº 266. sq., *Salmon*, *Conic Sections*, § 367.)

3. — *Généralisation.* Si une sphère inscrite au cône, coupe le plan S suivant un cercle c, et si son plan de contact avec le cône, coupe S suivant d'', on peut appeler c le *cercle focal* de la conique et d'' la *directrice* correspondante. La distance tangentielle d'un point m de C au cercle c, est à la distance de ce point à d'', dans un rapport constant.

4. — *Autre généralisation.* Soit une sphère de rayon r, et de centre O, inscrite au cône, la distance a de O à S étant $> r$. Soit F un point situé sur la perpendiculaire abaissée de O sur S, à une distance de S égale à $\sqrt{a^2 - r^2}$. Soit enfin D l'intersection du plan S avec le plan de contact de la sphère inscrite et du cône.

Cela posé, on voit sans peine, au moyen du lemme, que la portion de génératrice du cône, comprise entre un point m de C et le plan de contact, est dans un rapport constant à la distance de m à D ; que cette portion de génératrice est égale à Fm ; de sorte que F et D peuvent être regardés comme un *foyer* et une *directrice* de la conique. Pour une autre sphère, il y a un autre foyer F'; et l'on a $F'm \pm Fm =$ constante, selon que les sphères ne sont pas ou sont du même côté de S. On retrouve ainsi la propriété fondamentale des foyers d'une conique, *extérieurs* à son plan.

(A. TRANSON, *Nouv. Ann.* 1873, p. 21-22. — *Extrait.*)

BIBLIOGRAPHIE.

I.

Éléments de géométrie trilinéaire, par A. CAMBIER, professeur de mathématiques supérieures à l'athénée royal de Mons. Mons, Hector Manceaux. Bruxelles, Henri Manceaux, 1874. 48 pages in-8°. Prix : 2 fr.

Les ouvrages adoptés en Belgique, pour l'enseignement de la géométrie analytique, ne contiennent pas la théorie des coordonnées trilinéaires, quoique cette théorie ait été introduite depuis un demi-siècle dans la science, par Bobillier et Plücker, et que les ouvrages de Salmon l'aient popularisée en Angleterre et en Allemagne, depuis vingt ans. M. Cambier a eu l'heureuse idée de publier des *Éléments de géométrie trilinéaire* pour remédier sous ce rapport à l'insuffisance des manuels officiels. Il existe, depuis longtemps, en Allemagne un ouvrage du même genre, dû à M. Otto Hesse, et intitulé : *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der gerade Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene* (Leipzig, Teubner). Mais le plan du manuel de M. Cambier est très différent de celui de M. Hesse. Ce dernier se contente de traiter, avec le plus grand soin, les principales questions relatives au point, à la droite et au cercle. M. Cambier, au contraire, consacre un petit nombre de pages aux principes et à la ligne droite, puis il aborde, aussitôt que possible, la théorie des coniques, en général, et du cercle en particulier.

Une bonne partie des *Éléments* de M. Cambier est empruntée à l'ouvrage de M. Salmon sur les coniques — à notre avis, il aurait fallu en avertir le lecteur — et le reste est écrit dans le même esprit que le traité anglais. C'est assez dire que cet opuscule contient un très grand nombre de questions intéressantes dont la solution est seulement ébauchée. De cette manière, le lecteur peut, sans trop de peine, faire marcher de front la théorie et la pratique. Sous ce rapport, le manuel de M. Cambier est plus utile que celui de M. Hesse, particulièrement pour les élèves de première scientifique et pour les personnes qui veulent s'initier rapidement à la nouvelle géométrie.

Les *Éléments* de M. Cambier ont un défaut. Ils ne contiennent ni la théorie des coordonnées trilinéaires générales, ni celle des coordonnées tangentielles. Il en résulte que le *principe de dualité* n'y figure pas et que les propriétés métriques des figures y tiennent une trop grande place.

Ce défaut, au reste, n'est pas propre à l'ouvrage de M. Cambier : il existe, à un moindre degré, dans beaucoup de traités de géométrie analytique, publiés récemment, et même dans les *Conic Sections* de Salmon(1).

P. Mansion.

II.

Les mathématiques en Belgique, en 1872, par le docteur P. Mansion, professeur à l'université de Gand. (Extrait du *Bulletino di bibliografia e d'istoria delle scienze matematiche e fisiche*, t. 6, juillet 1873. Rome). Mons, Manceaux, 1874; 60 p. in-8°. Prix : 1 fr. 50.

Voici la table des matières de ce petit écrit, qui est une sorte d'introduction à la *Nouvelle Correspondance mathématique :*

Liste des écrits relatifs à l'histoire des mathématiques en Belgique (p. 3-5). *Chapitre I. Analyse.* Sur une nouvelle formule d'intérêt composé, par M. Catalan (p. 5-6). Sur une formule de Botesu, par M. Catalan (p. 6-9). Cours d'analyse infinitésimale, de M. Gilbert (p. 9-12). Sur l'emploi des imaginaires dans la recherche des différentielles d'ordre quelconque, par M. Gilbert (p. 12-13). Sur la théorie des solutions singulières, par M. Mansion (p. 13-16). Sur la méthode des facteurs symboliques de Brisson, par M. Mansion (p. 16-19). Sur les équations différentielles réciproques, par M. Orloff (p. 19-20). *Chapitre II. Géométrie.* La transformation arguesienne de M. Saltel (p. 21-34). Fondements d'une géo-

---

(1) Nous apprenons que M. Cambier se propose de publier plus tard un petit écrit sur les coordonnées tangentielles, si ses *Éléments de géométrie trilinéaire* sont bien accueillis. Le défaut que nous signalons n'est donc que momentané.

métrie supérieure cartésienne de M. Folie (p. 34-43). Théorème de géométrie, par M. Catalan (p. 43-44). Construction des axes d'une ellipse, par M. Cambier (p. 44-45). Problème de géométrie élémentaire (p. 45-47). Sur la méthode des limites, par M. Mansion (p. 47-48). Leçons de trigonométrie, par M. Cambier (p. 48). Cours de géométrie analytique, par M. Carnoy (p. 48-49). *Chapitre III. Mécanique.* Thermodynamique. Nouvelle démonstration du second principe fondamental, par M. Th. Belpaire (p. 49-53). Du frottement de glissement sur les surfaces hélicoïdes réglées, par M. de Tilly (p. 53-55). Sur quelques formules de balistique appliquée, par M. de Tilly (p. 56-57). Calcul de la densité de la terre, par M. Folie (p. 57-59). Notes scientifiques, par M. Wezel (p. 59-60). — L'auteur a oublié de citer, parmi les ouvrages publiés en 1872, le *Mémoire* de M. Graindorge *sur les équations aux dérivées partielles,* et la *Géométrie pratique* de M. de Vylder.

P. M.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Si un quadrilatère, plan ou gauche, a deux côtés opposés égaux : 1° ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés ; 2° la projection de chacun des premiers côtés, sur la médiane, est égale à la médiane.

2. Éliminer a et b entre les équations :

$$x = m \sin a \cos a \cos b, \quad y = m \sin b \cos b \cos a,$$
$$a + b = \theta,$$

θ étant l'angle des axes de coordonnées. Discuter l'équation résultante.

3. On prend, sur les côtés d'un triangle ABC, trois points C′, A′, B′, que l'on joint aux sommets opposés C, A, B. Démontrer, par la géométrie élémentaire, que AA′, BB′, CC′ sont les hauteurs du triangle ABC, si ces droites sont les bissectrices des angles du triangle A′B′C′.

4. Théorème. Un ellipsoïde étant donné, on prend pour *tableau* un plan diamétral AOB ; et, pour *point de vue,* une extrémité C du diamètre conjugué de AOB. Cela posé, les perspectives de toutes les coniques tracées sur l'ellipsoïde sont semblables à la section diamétrale AOB.

Corollaire. Si AOB est une *section circulaire*, auquel cas C est un *ombilic*, les perspectives de toutes les coniques tracées sur l'ellipsoïde sont des cercles.

5. Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire précédent, soit D une droite quelconque, et soit D′ la droite *conjuguée* de D′ (1). Soient E les ellipses dont les plans passent par D, et E′ les ellipses dont les plans passent par D′; soient enfin C les perspectives des ellipses E, et C′ les perspectives des ellipses E′. : *ces deux séries de cercles forment un système orthogonal*. (E. C.)

6. BACCHUS ET SILÈNE.

Bacchus, ayant vu Silène
Auprès de sa cuve endormi,
Se mit à boire sans gêne
Au dépens de son ami.
Ce jeu dura pendant le triple du cinquième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé :
Il s'éveille bientôt, et son chagrin extrême
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
S'il eût bu près de Bacchus même,
Ils auraient, suivant le problème,
Achevé six heures plus tôt ;
Alors Bacchus eût eu, pour son écot,
Deux tiers de ce qu'à l'autre il laisse.
Ce qui maintenant m'intéresse
Est de savoir, exactement,
Le temps qu'à chaque drôle il faut séparément
Pour vider la cuve entière,
Sans le secours de son digne confrère (2).

---

(1) Deux droites D, D′ sont dites *conjuguées*, relativement à une surface du deuxième ordre, quand le *pôle* de tout plan passant par l'une est situé sur l'autre.

(2) Ce curieux énoncé m'a été communiqué, il y a bien des années, par le savant Professeur et Philologue Vincent. On en trouve une *version*, différente de celle-ci, dans la troisième édition des *Problèmes plaisants et délectables*, de Bachet, que vient de publier M. Labosne. Vers 1848, un élève du lycée Charlemagne, à Paris, fit la jolie *réponse* suivante :

Dans cette occasion Silène eut tout l'honneur.
En quinze heures Bacchus acheva la besogne ;
Il n'en fallut que dix au digne précepteur :
J'en conclus qu'il était de moitié plus ivrogne ! (E. C.)

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)^m dx$.

(Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite.)

Permettez-moi de vous adresser une seconde détermination de l'intégrale de Poisson, $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)^m dx$, qui offre l'application la plus importante du théorème de M. Liouville, dont vous avez donné la démonstration.

Soit, pour abréger,

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}.$$

Je désigne par ε une constante telle que la série

$$\varepsilon f(x) + \varepsilon^2 f^2(x) + \ldots + \varepsilon^m f^m(x) + \ldots$$

soit convergente : elle aura pour somme

$$\frac{\varepsilon f(x)}{1-\varepsilon f(x)};$$

ce qui conduit à chercher la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\varepsilon f(x)\, dx}{1-\varepsilon f(x)},$$

dont il suffira ensuite d'effectuer le développement en série, suivant les puissances croissantes de ε. Or, en faisant pour un moment $\cos x = z$, la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle :

$$\frac{\varepsilon f(x)}{1-\varepsilon f(x)} = \frac{\varepsilon(1-z^2)}{1-2az+a^2-\varepsilon(1-z^2)}$$

donne immédiatement le résultat ; car, en écrivant

$$\frac{\varepsilon(1-z^2)}{1-2az+a^2-\varepsilon(1-z^2)} = -1 + \frac{G}{g-z} + \frac{H}{h-z},$$

vous voyez que nous sommes ramenés à l'intégrale connue

$$\int_0^\pi \frac{dx}{g - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{g^2 - 1}}.$$

Cela posé, on obtient, en résolvant l'équation du second degré

$$1 - 2az + a^2 - \varepsilon(1 - z^2) = 0,$$

$$g = \frac{a + \sqrt{(1-\varepsilon)(a^2 - \varepsilon)}}{\varepsilon},\ h = \frac{a - \sqrt{(1-\varepsilon)(a^2-\varepsilon)}}{\varepsilon}.$$

On a ensuite :

$$G = \frac{g^2 - 1}{g - h},\ H = \frac{h^2 - 1}{h - g},$$

et :

$$\sqrt{g^2 - 1} = \pm \frac{a\sqrt{1-\varepsilon} - \sqrt{a^2 - \varepsilon}}{\varepsilon},$$

$$\sqrt{h^2 - 1} = \pm \frac{a\sqrt{1-\varepsilon} + \sqrt{a^2 - \varepsilon}}{\varepsilon};$$

comme il est facile de le vérifier en élevant les deux membres au carré. Mais il est nécessaire, avant d'employer ces formules, de choisir les signes $\pm$ de manière que les radicaux aient bien les déterminations qui leur conviennent dans les relations :

$$\int_0^\pi \frac{dx}{g - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{g^2 - 1}},\ \int_0^\pi \frac{dx}{h - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{h^2 - 1}}.$$

Revenant, à cet effet à la condition de convergence de la série $\Sigma\varepsilon^m f^m(x)$, j'observe que le maximum de $f(x)$ est l'unité pour $a < 1$, et $\frac{1}{a^2}$ pour $a > 1$; on doit donc supposer $\varepsilon < 1$ dans le premier cas et $\varepsilon < a^2$ dans le second, de manière à avoir $\varepsilon f(x) < 1$, pour toutes les valeurs de la variable. De l'inégalité $1 - \varepsilon f(x) > 0$, résulte que l'équation

$$1 - \varepsilon f(x) = 0$$

n'admet aucune racine réelle par rapport à x ; cependant on peut toujours supposer g et h réels, en prenant dans les deux cas, ce qui est permis, ε moindre que la plus petite des quantités 1 et a^2. Effectivement, le radical $\sqrt{(1 - \varepsilon)(a^2 - \varepsilon)}$ sera réel et, si l'on admet que a soit positif ainsi que ε, l'équation

$$1 - 2az + a^2 - \varepsilon(1 - z^2) = 0,$$

fait voir que les racines seront, l'une et l'autre, positives. De là résulte que, dans les relations précédentes :

$$\int_0^\pi \frac{dx}{g - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{g^2 - 1}}, \quad \int_0^\pi \frac{dx}{h - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{h^2 - 1}},$$

les radicaux ont le signe + ; par suite, on doit prendre :

$$\sqrt{g^2 - 1} = \frac{a\sqrt{1 - \varepsilon} - \sqrt{a^2 - \varepsilon}}{\varepsilon},$$

si l'on suppose $a < 1$; et

$$\sqrt{g^2 - 1} = \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon} - a\sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon},$$

dans le cas de $a > 1$. Ayant toujours d'ailleurs :

$$\sqrt{h^2 - 1} = \frac{a\sqrt{1 - \varepsilon} + \sqrt{a^2 - \varepsilon}}{\varepsilon},$$

on obtient, dans le premier cas,

$$\int_0^\pi \frac{\varepsilon \sin^2 x \, dx}{1 - 2a\cos x + a^2 - \varepsilon \sin^2 x} = \pi \left[-1 + (1 - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

et, dans le second,

$$\int_0^\pi \frac{\varepsilon \sin^2 x \, dx}{1 - 2a\cos x + a^2 - \varepsilon \sin^2 x} = \pi \left[-1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]:$$

Vous voyez que ces formules donnent bien le résultat de Poisson, en faisant usage du développement :

$$(1 - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2 + \ldots + \frac{1.3.5 \ldots .(2m-1)}{2.4.6 \ldots .2m}\varepsilon^m + \ldots$$

14 août 1874.

NOTE SUR LES AXES INSTANTANÉS GLISSANTS ET LES AXES CENTRAUX, DANS UN CORPS SOLIDE EN MOUVEMENT ;

par J. M. De Tilly,

Capitaine d'artillerie, Professeur à l'École militaire, Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

(Extrait des *Bull. de l'Ac. royale de Belg.*, 1873, t. 33, p. 24-30.)

Note préliminaire. M. De Tilly, en nous autorisant à reproduire cette curieuse démonstration d'un théorème fondamental de la Cinématique, nous fait connaître comment il y est arrivé et quelle forme il lui avait d'abord donnée :

Si un corps solide se meut, un point quelconque a de ce corps est remplacé par un point b, dans la position qu'il occupe ; le point b par un point c, et ainsi de suite. Il résulte de là que, dans le mouvement du corps, la ligne rigide abc... glisse sur elle-même. Or *la seule ligne qui puisse glisser sur elle-même est l'hélice.* Donc, dans tout corps solide en mouvement, il existe une hélice dont le mouvement actuel est un glissement sur elle-même. Dès lors l'axe du cylindre de révolution, auquel appartient cette hélice, glisse sur lui-même, pendant le mouvement du corps, le corps tournant en même temps autour de cet axe, qui est l'axe instantané glissant.

On démontre ainsi l'existence de l'axe instantané, mais en s'appuyant sur un lemme, savoir : *la seule ligne qui puisse glisser sur elle-même est l'hélice.* Pour éviter ce lemme, l'auteur a modifié sa démonstration, et c'est l'existence de l'axe central qu'il a établie en premier lieu.

1. Depuis que la notion de l'*axe instantané glissant,* et la notion plus générale de l'*axe central* de deux positions quelconques d'un corps solide en mouvement, ont été introduites dans la science, on a démontré, de plusieurs manières, l'existence de ces axes, et indiqué diverses constructions qui peuvent servir à les déterminer, lorsque l'on possède des données suffisantes.

J'ignore toutefois si l'on a déjà observé que ces notions et quelques autres, ordinairement précédées, dans les traités de Cinématique, d'un assez grand nombre de propositions préliminaires, peuvent être établies dès le début et *a priori*, au moyen des considérations suivantes, qui me paraissent simples et naturelles [1].

---

[1] L'axe instantané glissant étant un cas particulier de l'axe central, je m'occuperai uniquement de ce dernier ; il suffira de changer quelques mots pour que le raisonnement se rapporte à l'autre.

2. Lorsqu'un corps solide passe d'une position à une autre, un point quelconque a, lié au corps, est remplacé, dans la position primitive qu'il occupait dans l'espace, par un autre point b ; le point b est remplacé, dans la sienne, par un point c, etc., et l'on a, évidemment : $ab = bc = \ldots$; donc, lorsqu'un corps solide passe d'une position à une autre position quelconque, il existe, pour chaque point a, appartenant au corps ou lié au corps, une ligne polygonale, indéfinie et régulière (plane ou gauche), qui revient dans sa position primitive après le déplacement, chaque sommet ayant avancé d'un rang. Parmi toutes les lignes polygonales correspondant aux différents points tels que a, choisissons celle, ou l'une de celles, dont l'élément rectiligne est un minimum. Soit $a' b' c' \ldots$ cette ligne polygonale régulière.

J'exclus pour le moment, et sauf à y revenir tout à l'heure, le cas particulier où l'élément $a' b'$ de cette ligne serait nul, c'est-à-dire le cas où un point a' du corps serait revenu dans sa position primitive. Alors je dis que $a' b' c' d' \ldots$ est une ligne droite. Soient, en effet, a'', b'', c'',... les milieux respectifs des côtés $a' b'$, $b' c'$, $c' d'$, ... ; si la ligne $a' b' c' d' \ldots$ est droite, on a :

$$a'' b'' = a'' b' + b' b'' = a' b';$$

si, au contraire, $a' b' c' d' \ldots$ n'était pas une ligne droite, on aurait :

$$a'' b'' < a'' b' + b' b'',$$

ou

$$a'' b'' < a' b';$$

or ceci est contre l'hypothèse; car, lorsque la ligne polygonale $a' b' c' d' \ldots$ sera revenue dans sa position primitive, les milieux a'', b'', c'',.. de ses côtés se seront remplacés deux à deux, de manière que chacun de ces milieux ait avancé d'un rang ; donc $a'' b'' c'' \ldots$ est la ligne polygonale du point a''; et, par conséquent, on ne peut avoir $a'' b'' < a' b'$, ce dernier côté étant supposé minimum parmi tous ceux des lignes polygonales des divers points.

Donc, si l'on considère un même corps solide dans deux positions différentes quelconques, il y a toujours, dans ce solide, une droite dont la position n'a pas changé et qui est placée comme si elle n'avait fait que glisser sur elle-même, de sorte que le corps peut passer, de la première position à la seconde, par un mouvement héliçoïdal, autour de cette droite comme axe. C'est l'*axe central* des deux positions du solide.

3. J'ai exclu, il est vrai, le cas où un point du corps n'aurait

pas changé de place, ou serait revenu à sa place primitive ; mais je vais montrer maintenant, par une méthode tout à fait analogue, que le théorème s'applique aussi à ce cas; seulement alors le mouvement héliçoïdal se réduit à un mouvement de rotation.

Pour cela, autour du point qui n'a pas changé de place, décrivons une sphère de rayon quelconque. Tous les points appartenant à la sphère, dans la première position, se trouveront encore sur la sphère, dans la seconde; et, à chaque point α de la sphère, correspondra, pour le même motif que plus haut, une ligne polygonale régulière $\alpha\beta\gamma\delta$..., dont les côtés seront des arcs de grands cercles, et qui reviendra dans sa position primitive après le déplacement, chaque sommet ayant avancé d'un rang. Si, parmi toutes ces lignes polygonales, il s'en trouve une qui se réduise à un point, ce point sera revenu dans sa position primitive; et, en le joignant au centre de la sphère, on obtiendra une droite qui sera aussi revenue sur elle-même. Si, au contraire, aucune ligne polygonale n'avait un côté nul, celle dont le côté serait minimum devrait se réduire à un grand cercle de la sphère, pour une raison déjà expliquée; mais ceci est contradictoire, car alors les deux pôles de ce grand cercle occuperaient leurs places primitives. Donc, enfin, le théorème relatif à l'axe central, énoncé plus haut, se trouve établi pour tous les cas.

4. Lorsqu'un solide passe d'une position à une autre, le *déplacement rectiligne total* d'un point quelconque est représenté par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un côté de l'angle droit est égal au déplacement commun de tous les points, par la translation le long de l'axe central, et dont l'autre côté est la corde de l'arc décrit par le point considéré, dans sa rotation autour du même axe. Donc, pour que les déplacements totaux de deux points soient égaux, il faut et il suffit que les cordes en question soient égales; et, comme l'angle au centre est le même pour tous les points, cette condition revient à celle de l'égalité des rayons, c'est-à-dire que le lieu des points, dont le déplacement rectiligne total est égal à une longueur donnée, est un cylindre, dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe central des deux positions du solide.

5. Par un point quelconque, menons des droites respective-

ment parallèles et égales à celles qui représentent les déplacements rectilignes totaux de tous les points du corps et, de plus, dirigées dans le même sens que ces déplacements. Toutes ces droites devront se projeter suivant une seule et même longueur sur l'axe central ; donc leurs extrémités se trouveront toutes dans un même plan perpendiculaire à cet axe.

Cette remarque permet d'obtenir la direction de l'axe central, lorsque l'on connaît les déplacements totaux de trois points du corps.

6. Considérons un même point du solide, qui soit en A dans la position initiale et en B dans la position finale. Le solide peut évidemment être amené, de la première position à la seconde, par une translation rectiligne pure, qui amène de A en B le point considéré (que j'appellerai, dans la suite, *point directeur*), suivie d'un autre mouvement, dans lequel le point directeur ne changerait plus de place, et pour lequel on peut choisir, d'après ce qui précède, une rotation pure autour d'un axe BC.

7. Or, le raisonnement du § 5 s'applique, sans modification, aux axes de rotation, tels que BC, ainsi obtenus. Soit, en effet, A′ la position initiale d'un point quelconque, lequel est amené en B′ par la translation AB, et dont la position finale est C′. Il est évident que les points B′ et C′ se projettent en un seul et même point sur l'axe de rotation BC ; donc la projection du déplacement total A′C′, sur BC, est la même que celle de A′B′, ou de AB, sur le même axe. Ainsi les déplacements totaux de tous les points se projettent, sur BC, suivant une seule et même longueur. Donc la construction du § 5 peut être employée pour trouver la direction de cet axe ; et, comme cette construction donne un résultat unique, on en conclut que les divers axes de rotation, obtenus en prenant les divers points du corps comme points directeurs, sont parallèles entre eux et à l'axe central.

8. De plus, il est facile de voir que les déplacements angulaires, autour de chacun de ces axes, sont tous égaux. En effet, considérons, dans la position initiale, une droite perpendiculaire à l'axe central et, dans la position finale, une droite homologue à la première. Soit α l'angle de ces droites homologues, ou de deux parallèles menées à ces droites, par un point quelconque. Amenons le solide, de la première position dans la seconde, par

une translation empruntée à l'un quelconque des points, suivie de la rotation nécessaire. Pendant la translation, l'angle α reste invariable. Si alors, par un point de la droite qui va servir d'axe à la rotation qui doit compléter le déplacement, on mène deux parallèles aux droites homologues considérées, elles seront toutes deux perpendiculaires à l'axe de rotation et feront entre elles l'angle α. Or la rotation, devant faire coïncider les droites homologues, doit aussi faire coïncider leurs parallèles ; donc le déplacement angulaire correspondra à l'angle α, c'est-à-dire qu'il sera indépendant du point choisi comme point directeur.

9. La direction de l'axe central étant connue, on peut obtenir la position de cet axe en construisant les triangles rectangles dont il est question au § 4, et pour chacun desquels on connaît l'hypoténuse et la direction d'un côté de l'angle droit (parallèle à l'axe central). Par vérification, la longueur de ce côté sera la même dans tous les triangles. Dans chacun de ceux-ci, on mènera, par le milieu du troisième côté (corde de l'arc décrit autour de l'axe central), un plan perpendiculaire à ce troisième côté. Tous les plans ainsi obtenus se couperont suivant une même droite, axe central cherché.

10. Les déductions des § 7 et 9 peuvent se remplacer, tout aussi simplement, par les suivantes :

A étant, comme plus haut, le point directeur ; AB, la translation rectiligne ; BC, l'axe de la rotation qui complète le déplacement ; tous les points de la parallèle AD menée, par le point A, à la droite BC, subissent un déplacement rectiligne total égal à AB ; donc AD est une génératrice du cylindre de révolution, lieu des points dont le déplacement total est AB. De plus, BC est une autre génératrice de ce même cylindre ; donc l'axe du cylindre, c'est-à-dire l'axe central, est parallèle à BC. Ainsi les divers axes de rotation que l'on obtient, en prenant les divers points du corps comme points directeurs, sont parallèles entre eux et à l'axe central.

Puisque l'on connaît les points A, B et la direction de l'axe central (§ 5), on peut tracer les génératrices AD, BC ; et la connaissance de ces deux génératrices d'un cylindre permet de construire un plan, perpendiculaire à celui qu'elles déterminent, et contenant l'axe du cylindre, c'est-à-dire l'axe central.

Répétant la construction pour autant de points qu'on voudra, tous les plans obtenus se couperont suivant l'axe central.

QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

Les questions suivantes se résolvent assez simplement par un artifice de calcul dont les traités d'Algèbre feraient bien de donner au moins un exemple.

1. *Par un point donné A, situé à l'intérieur de l'angle XOY, mener une sécante telle que la somme des segments OB, OC, qu'elle détermine sur les droites OX, OY, soit minimum.*

Posons :

$$\mathrm{OB} = x, \quad \mathrm{OC} = y, \quad x + y = u. \qquad (1)$$

Soient (α, β) les coordonnées du point A ; on a

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} = 1\,; \qquad (2)$$

d'où, en multipliant les égalités (1) et (2) membre à membre,

$$u = \alpha + \beta + \frac{\alpha y}{x} + \frac{\beta x}{y}. \qquad (3)$$

On voit que le minimum de u a lieu en même temps que celui de la somme des quantités $\frac{\alpha y}{x}$, $\frac{\beta x}{y}$, dont le produit est constant; par suite il faut poser :

$$\frac{\alpha y}{x} = \frac{\beta x}{y} = \sqrt{\alpha\beta}\,;$$

ou

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (4)$$

Les variables x, y étant essentiellement positives dans la question donnée, nous prendrons :

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\,;$$

d'où

$$\frac{\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\frac{\beta}{y}}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{y} = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{u}\,;$$

c'est-à-dire,

$$u = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2.$$

De l'équation (4), on peut aussi tirer :

$$\frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}};$$

et cette proportion, combinée avec la relation (2), donne :

$$x = \sqrt{\alpha}\,(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}),\; y = \sqrt{\beta}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}). \qquad (5)$$

Si l'on suppose $\alpha > \beta$, on a $x > 0, y < 0$; en changeant le signe de y dans les égalités (1), (2) et (3), on reconnaît facilement que les valeurs (5) déterminent une sécante qui rencontre le prolongement de OY et pour laquelle la différence OB—OC est maximum.

On peut démontrer, sans calcul, l'existence de ce minimum et de ce maximum en observant que la somme OB + OC est infinie, lorsque la sécante est parallèle à OX ou à OY, et que la différence OB — OC s'annule, lorsque la sécante se confond avec OA ou lorsqu'elle est parallèle à la bissectrice de l'angle XOY.

2. *Trouver le minimum d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les axes.*

Soit u la longueur de la tangente au point (x, y) de la courbe; on a les équations :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

$$u^2 = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}.$$

Si on les multiplie membre à membre, un raisonnement analogue à celui que l'on a employé dans la première question fait voir que le minimum cherché est $(a+b)$ et correspond au point pour lequel

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^3}{b^3}.$$

3. *Trouver le maximum de la distance du centre d'une ellipse à une normale.*

Soit v la distance du centre à la normale menée par le point (x, y) ; on a :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

$$v^2 = \frac{c^4x^2y^2}{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

La dernière équation peut être écrite ainsi :

$$\frac{c^4}{v^2} = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}.$$

En la combinant avec la première, on trouve, pour le maximum,

$$v = a - b, \ \frac{x^2}{y^2} = \frac{a^3}{b^3}.$$

La relation $uv = c^2$ explique immédiatement pourquoi l'on obtient le même point de l'ellipse, dans les questions 2 et 3 (1).

4. *Trouver, sur la ligne des centres de deux sphères O et O', un point C tel, que la somme des deux zones vues de ce point soit maximum.*

Désignons par R, R' les rayons des deux sphères, par d la distance de leurs centres, par x, y les distances CO, CO'. Les deux zones ayant pour mesures :

$$2\pi R\left(R - \frac{R^2}{x}\right), \quad 2\pi R'\left(R' - \frac{R'^2}{y}\right),$$

le maximum de leur somme correspond au minimum de la quantité

$$u = \frac{R^3}{x} + \frac{R'^3}{y}.$$

En multipliant par

$$d = x + y,$$

on voit que le point cherché est défini par la relation

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{R^3}{R'^3}.$$

J. Neuberg.

---

[1] Pour ces questions, consulter les *Nouvelles Annales de Mathématiques, année* 1873, pages 44-47.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Paris, 1873.)

Solution de la question de mathématiques élémentaires.

On considère les cercles ex-inscrits à un triangle ABC,*et l'on joint les points de contact de chacun de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés ; on forme ainsi un nouveau triangle* A'B'C'. *On demande :* 1° *d'évaluer les angles du triangle* A'B'C' ; 2° *de démontrer que les droites* AA', BB', CC' *sont les hauteurs du triangle* ABC ; 3° *de déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle* A'B'C'.

Une solution trigonométrique de cette question, due à M. Gambey, a paru dans les *Nouvelles Annales, janvier* 1874, p. 43. Nous allons développer une solution géométrique, qui nous donnera quelques propriétés intéressantes du triangle A'B'C'.

Soient (¹) O, O_1, O_2, O_3 les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle ABC; (M,N,P), (M_1, N_1, P_1),...., leurs projections sur les droites BC, CA, AB ; (r, r_1, r_2, r_3) les rayons de ces cercles. Les droites N_1P_1, P_2M_2, M_3N_3 forment le triangle A'B'C'. Désignons par R, R' les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC, A'B'C', et par X, Y, Z, α les points d'intersection des droites $(O_2O_3$, A'C'), $(O_2O_3$, A'B'), $(O_2O_1$, A'C'), $(AO_1$, BC).

1. Rappelons d'abord quelques propriétés connues. Les bissectrices intérieures de ABC sont les hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$ formé par les bissectrices extérieures. Par suite, les circonférences décrites sur O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2, comme diamètres, passent respectivement par les points B et C, C et A, A et B. Il en résulte que les couples de droites O_2O_3 et BC, O_3O_1 et CA, O_1O_2 et AB sont anti-parallèles par rapport aux angles O_1, O_2, O_3, et que les triangles O_1BC, AO_2C, ABO_3 sont semblables à $O_1O_2O_3$. Remarquons aussi que les angles O_1, O_2, O_3, respective-

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

ment égaux à CAO_2, CBO_1, ACO_2, sont les compléments de $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$.

2. Les droites M_3P_2, O_3O_1 sont parallèles, comme perpendiculaires à la même droite BO_2 ; de même, P_1N_1, O_2O_3 sont parallèles; M_3N_3, O_1O_2 sont parallèles. Donc les triangles A'B'C', $O_1O_2O_3$ sont homothétiques ; ainsi

$$A' = \frac{\pi - A}{2},\ B' = \frac{\pi - B}{2},\ C' = \frac{\pi - C}{2}.$$

3. Dans les triangles semblables O_2AC et $O_2O_1O_3$, N_2 et B sont des points homologues. Les triangles AN_2X et AP_2X, CN_2Z et CM_2Z étant égaux, on a

$$\text{angle } AN_2X = AP_2X = CBO_1,$$
$$\text{angle } CN_2Z = CN_2Z = ABO_3\ ;$$

par conséquent, les droites N_2X et N_2Z sont aussi les homologues de BC et AB. Il en résulte que CX et AZ sont perpendiculaires à AO_2, CO_2. Ainsi :

Les côtés des triangles A'B'C', $O_1O_2O_3$ *se coupent, deux à deux, aux pieds des hauteurs des triangles* O_1BC, O_2CA, O_3AB.

4. Les triangles $A'M_2M_3$, $O_1O_2O_3$, A'YX, O_1BC sont semblables entre eux, comme étant équiangles. De plus, dans les deux premiers, YX et BC sont des lignes homologues ; car on a la proportion

$$\frac{YX}{BC} = \frac{M_2M_3}{O_2O_3},$$

qui résulte de ce que les antécédents sont les projections des conséquents. On en peut conclure que M_3X et M_2Y sont deux hauteurs du triangle $A'M_2M_3$, et comme ces droites sont perpendiculaires sur O_1O_3 et O_1O_2, elles passent par P_3 et N_2. La troisième hauteur est AA' ; car, dans les triangles semblables A'YX et O_1BC, les points A et α sont homologues, à cause de la proportion

$$\frac{AY}{AX} = \frac{\alpha B}{\alpha C},$$

qui résulte du parallélisme des droites BY, AO_1, XC.

On a donc la proposition suivante :

Les polaires des points B, C, *par rapport aux circonférences* O_2, O_3, *forment un quadrilatère dont deux sommets sont sur la ligne des centres, et les deux autres sur la perpendiculaire abaissée de* A *sur* BC.

5. Les droites AA′, BB′, CC′ étant les hauteurs du triangle ABC, se coupent en un même point H ; et, comme les triangles HA′B′, HB′C′, HA′C′ sont isocèles (les angles en sont égaux deux à deux), on voit que

Le point de concours des hauteurs du triangle ABC *est le centre du cercle circonscrit à* A′B′C′.

6. Menons, par A, une parallèle à BC, qui rencontre A′C′ en U. Le triangle P_2AU, semblable à P_2BM_2, est isocèle ; de plus $AU = AP_2 = BM_1$; par suite, les triangles rectangles A′AU, $O_1M_1B_1$ sont égaux; et l'on a $A'A = O_1M_1$. Ainsi :

Les distances AA′, BB′, CC′ *sont égales aux rayons des cercles ex-inscrits à* ABC.

7. D'après un théorème connu,

$$AH = 2R + r - r_1.$$

On vient de trouver

$$AA' = r_1 ;$$

par conséquent

$$R' = A'H = 2R + r.$$

Si l'on tient compte de la relation

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r,$$

on arrive aussi à

$$R' = \frac{r + r_1 + r_2 + r_3}{2},$$

c'est-à-dire que :

Le rayon du cercle circonscrit à A′B′C′ *est égal à la demi-somme des rayons des quatre cercles tangents aux côtés de* ABC.

Comme le rayon du cercle circonscrit à $O_1O_2O_3$ est égal à 2 R, le rapport de similitude des triangles A′B′C′, $O_1O_2O_3$ est $\frac{2R + r}{2R}$. Les droites $A'O_1$, $B'O_2$, $C'O_3$ passent par un même point K et se divisent mutuellement dans ce même rapport.

8. Soit α' le point d'intersection de BC et $A'O_1$. Ce point étant le centre d'homothèthie des triangles $A'M_2M_3$ et O_1BC, on a

$$\frac{\alpha'B}{\alpha'C} = \frac{\alpha'M_2}{\alpha'M_3} = \frac{\alpha'B + \alpha'M_2}{\alpha'C + \alpha'M_3};$$

d'où, à cause de $BM_2 = CM_3$:

$$\alpha'B = \alpha'C.$$

Par conséquent : 1° *les droites* $A'O_1$, $B'O_2$, $C'O_3$ *passent par les milieux des côtés du triangle* ABC ; 2° *le point* K *est le centre des médianes anti-parallèles des triangles* $A'B'C'$, $O_1O_2O_3$ (¹).

Remarque. La propriété des circonférences O_1, O_2, que nous avons trouvée au § 4, peut encore être énoncée ainsi (après un changement de notations) :

Étant données deux circonférences O *et* O′, *les deux tangentes communes intérieures* (*ou extérieures*) AA′, BB′, *et une tangente commune extérieure* (*ou intérieure*) CC′ :

1° *les cordes* CA, C′A′ *sont perpendiculaires et se coupent sur la ligne des centres* ; *il en est de même de* CB, C′B′ ;

2° *la droite qui joint les points d'intersection des cordes* CA *et* C′B′, CB *et* C′A′, *passe par le centre de similitude interne* (*ou externe*), *et est perpendiculaire sur* CC′.

Ce théorème, appliqué aux circonférences O, O_1, montre que les droites MP, M_1P_1 se coupent sur A_1O_1, et que MP, M_1N_1 se rencontrent sur AH.

NEUBERG.

Note de la Rédaction. Le problème dont M. Neuberg vient de donner une élégante solution, figurerait très bien dans une *composition en Mathématiques élémentaires*. Mais dans un concours d'*Agrégation des Lycées !* Si nous avons bonne mémoire, voici quelles étaient les questions proposées, en 1847, aux Aspirants à l'Agrégation :

1° *Démontrer la formule*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin \alpha x \sin \alpha\beta f(\beta)\, d\alpha\, d\beta ;$$

2° *Déterminer le mouvement d'un projectile, en ayant égard à la rotation de la Terre.*

Il est vrai qu'en 1847, MM. Leverrier, Fortoul et Cie n'avaient pas encore *réformé* l'Enseignement ! E. C.

(¹) Sur le centre des médianes anti-parallèles, voir un article de M. LEMOINE, dans les *Nouvelles Annales*, *année* 1873, page 364.

SUR CERTAINES COURBES, QUARRABLES ALGÉBRIQUEMENT.

M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse* (1) (p. 401-406), a donné quelques notions sur les cubiques unicursales, quarrables algébriquement. La méthode qu'il a suivie suppose la décomposition effective d'une fraction rationnelle en fractions simples, et exige des calculs assez compliqués, qui ne permettent pas de l'étendre facilement aux courbes de degré supérieur. Nous exposons, dans cette Note, une méthode plus simple, applicable à toutes les courbes unicursales d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $(n-1)$. Cette méthode n'introduit d'autres calculs que la résolution d'équations linéaires.

I.

Formule fondamentale.

1. *Formule pour la quadrature des aires planes.* La mesure de l'aire d'un triangle ayant pour sommets deux points dont les coordonnées rectangulaires sont

$$(x, y), \quad (x+\Delta x, \quad y+\Delta y),$$

et l'origine O des coordonnées, est, en valeur absolue,

$$\tfrac{1}{2}(x\Delta y - y\Delta x).$$

Considérons un point M, mobile sur une courbe quelconque. Supposons que les positions extrêmes de M soient le point C, dont les coordonnées sont x_0, y_0, et le point F, dont les coordonnées sont X, Y. La somme des aires décrites par le rayon vecteur OM, quand le point M passe de C en F, est donnée par la formule

$$2\,S = \int (x dy - y dx).$$

(1) *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique*, par M. Ch. Hermite. Première partie. Paris, Gauthier-Villars, 1873. Voir, plus loin, notre compte-rendu de cet ouvrage.

Les limites de l'intégrale relative à x sont x_0, X ; les limites de la seconde intégrale sont y_0, Y; S est une somme algébrique : les aires décrites par OM, en allant de OX vers OY, étant positives ; et les aires décrites en sens inverse, négatives.

Si l'on choisit pour variable indépendante la quantité $t = \frac{y}{x}$, l'intégrale 2 S prend une forme très simple, qui n'a peut-être pas été remarquée. On a, en effet,

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2};$$

et, par conséquent, t_0 et T étant les valeurs de t correspondant à x_0 et X:

$$2\,S = \int_{t_0}^{T} x^2 dt. \qquad \text{(A)}$$

C'est cette formule qui va nous servir à étudier certaines courbes unicursales, quarrables algébriquement, après que nous en aurons montré l'usage, en général.

2. *Usage de la formule* (A). Soit une courbe dont les coordonnées sont exprimées, en fonction d'un paramètre variable t, de la manière suivante :

$$x = \frac{L\sqrt{R}}{N},\ y = \frac{Lt\sqrt{R}}{N},$$

L, R et N étant des fonctions entières, quelconques, de t. D'après (A), l'aire d'un secteur de la courbe sera donnée par la formule

$$2\,S = \int_{t_0}^{T} \frac{L^2R}{N^2}\,dt.$$

On peut toujours trouver cette intégrale, comme l'on sait, au moyen de fonctions algébriques rationnelles, d'arc tangentes et de logarithmes, puisque la quantité sous le signe d'intégration est rationnelle. En particulier, si $R = 1$ (et dans beaucoup d'autres cas encore), la courbe est unicursale.

3. *Exemple*. Considérons, avec M. Hermite, *le folium de Descartes*, dont l'équation est

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

et dont l'asymptote est représentée par

$$x + y + a = 0.$$

Appelons O l'origine, A le point de la *feuille* où x est maximum, B celui où y est maximum, P le point où l'asymptote coupe l'axe des x, Q le point où elle coupe l'axe des y. La courbe est tangente, en O, aux deux axes.

Posons $y = tx$. On trouve, pour la courbe,

$$x = \frac{3at}{1 + t^3};$$

et, pour l'asymptote,

$$x = \frac{-a}{1 + t}.$$

Aux points O, A, B, O, P, Q, et aux points à l'infini sur l'asymptote et sur la courbe, les valeurs de t, sont respectivement :

$$0, \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[3]{2}, +\infty, 0, -\infty, -1.$$

L'intégrale de x^2dt, pour la courbe, est

$$-\frac{-3a^2}{1 + t^3};$$

et, pour l'asymptote,

$$\frac{-a^2}{1 + t}.$$

Par suite, on trouve, pour l'aire comprise entre OA et la courbe, pour l'aire OAB, pour l'aire comprise entre OB et la courbe, enfin pour l'aire OPQ, la même quantité $\frac{a^2}{2}$.

L'aire comprise entre la courbe et l'asymptote, dans le second et le quatrième angle des coordonnées, a pour valeur générale

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{-a^2}{1+t} + \frac{3a^2}{1+t^3}\right\} = \frac{a^2}{2}\,\frac{2-t}{1-t+t^2}.$$

Si, dans cette expression, l'on fait $t = -\infty$, $t = -1$, qu'on

retranche le premier résultat du second, on trouve l'aire $OQ\infty$, en désignant ainsi l'aire indéfinie comprise entre l'axe des y, la courbe et l'asymptote. Si l'on fait, au contraire, $t = -1$, $t = 0$, et qu'on retranche le premier résultat du second, on trouve l'aire ∞OP, comprise entre l'axe des x, la courbe et l'asymptote. Ces deux aires sont encore égales à celle du triangle OPQ.

En résumé, on a donc

$$OPQ = OKA = OAB = OBG = OP\infty = OQ\infty,$$

K étant un point de l'arc OA, G un point de l'arc OB.

La plupart des auteurs cherchent l'aire totale OKABGO, et celle des surfaces indéfinies $OP\infty$, $OQ\infty$, sans signaler la curieuse égalité des trois parties de la feuille du folium. (Voir Hermite, *Cours d'Analyse*, p. 404-406 ; Serret, *Calcul intégral*, p. 238-240, n° 253.)

II.

Méthode pour reconnaitre si une courbe du n^e^ ordre, ayant un point multiple d'ordre n—1, est quarrable algébriquement.

4. *Détermination de la partie transcendante de l'aire d'une courbe d'ordre* n, *à point multiple d'ordre* n — 1. Pour plus de simplicité, nous nous contenterons de considérer une cubique à point double (ou point isolé, ou point de rebroussement), ce qui permettra de comparer nos résultats à ceux de M. Hermite. Le point double étant pris pour origine, l'équation aura la forme :

$$(a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3) + (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2) = 0.$$

En posant $y = tx$, on trouve, A, B, C, α, β, γ, étant des constantes,

$$x = \frac{b_0 + b_1t + b_2t^2}{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3} = \frac{f(t)}{F(t)} = \frac{A}{t-\alpha} + \frac{B}{t-\beta} + \frac{C}{t-\gamma}.$$

Par suite,

$$2\,S = \int x^2dt = \int\left(\frac{A}{t-\alpha} + \frac{B}{t-\beta} + \frac{C}{t-\gamma}\right)^2 dt = 2S' + 2S'',$$

$$2\,S' = \int\left[\frac{A^2}{(t-\alpha)^2} + \frac{B^2}{(t-\beta)^2} + \frac{C^2}{(t-\gamma)^2}\right] dt,$$

$$S'' = \int\left[\frac{AB}{(t-\alpha)(t-\beta)} + \frac{BC}{(t-\beta)(t-\gamma)} + \frac{CA}{(t-\gamma)(t-\alpha)}\right] dt.$$

A cause de

$$\int \frac{dt}{(t-m)(t-n)} = \frac{1}{m-n} \, l\,(t-m) + \frac{1}{n-m} \, l\,(t-n),$$

il est clair que

$$\begin{aligned} S'' = & \left(\frac{AB}{\alpha-\beta} + \frac{AC}{\alpha-\gamma}\right) l\,(t-\alpha) \\ & + \left(\frac{BA}{\beta-\alpha} + \frac{BC}{\beta-\gamma}\right) l\,(t-\beta) \\ & + \left(\frac{CA}{\gamma-\alpha} + \frac{CB}{\gamma-\beta}\right) l\,(t-\gamma). \end{aligned}$$

5. *Première méthode.* Pour que l'intégrale S soit algébrique, il faut et il suffit que l'on ait $S'' = 0$, c'est-à-dire que les coeffi-cients de

$$\log\,(t-\alpha),\ \log\,(t-\beta),\ \log\,(t-\gamma)$$

soient nuls. Ces conditions se réduisent à :

$$\frac{AB}{\alpha-\beta} + \frac{AC}{\alpha-\gamma} = 0,$$

$$\frac{BA}{\beta-\alpha} + \frac{BC}{\beta-\gamma} = 0;$$

parce que la *somme des trois coefficients est identiquement nulle.*

Les équations auxquelles nous venons d'arriver sont, sous une forme plus simple et plus symétrique, celles de M. Hermite. La méthode précédente peut être aisément étendue à des courbes de degré quelconque, même dans le cas où la fraction rationnelle a un dénominateur ayant des facteurs multiples; mais elle a, comme celle de M. Hermite, l'inconvénient d'exiger la décomposition effective de cette fraction rationnelle.

La méthode suivante, basée sur la détermination directe de la *partie algébrique* de l'intégrale, conduit plus simplement au même résultat, sauf dans le cas où le dénominateur de la fraction a des facteurs multiples.

6. *Seconde méthode.* On a

$$2\,S' = -\left(\frac{A^2}{x-\alpha} + \frac{B^2}{x-\beta} + \frac{C^2}{x-\gamma}\right) = \frac{\varphi(t)}{F(t)},$$

$\varphi(t)$ étant une fonction de la forme

$$c_1 + c_2\,t + c_3 t^2.$$

Si la courbe est quarrable algébriquement, on doit avoir :

$$2\,S = 2\,S',$$

ou

$$\int x^2 dt = \int \left(\frac{f}{F}\right)^2 dt = \frac{\varphi}{F}.$$

On tire de là, en prenant la dérivée par rapport à t :

$$\left(\frac{f}{F}\right)^2 = \frac{F.\varphi' - F'.\varphi}{(F)^2}$$

ou

$$(f)^2 = F.\,\varphi' - F'.\,\varphi.$$

Cette égalité permet de trouver la fonction φ et, en même temps, les conditions d'intégrabilité algébrique de x^2dt. Il suffit, pour cela, d'égaler les coefficients des diverses puissances de t, dans les deux membres. On obtient ainsi cinq équations linéaires en c_1, c_2, c_3, dont trois servent à trouver les valeurs de ces coefficients inconnus, et dont les deux autres, après élimination de c_1, c_2, c_3, donnent les deux conditions d'intégrabilité algébrique cherchées.

Voici les équations auxquelles on est conduit dans le cas actuel [1],

$$b_0^2 = a_0\,c_2 - a_1\,c_1,\quad b_0\,b_1 = a_0\,c_3 - a_2\,c_1,$$
$$b_2^2 = -a_3\,c_3\,,\quad b_1\,b_2 = -a_3\,c_2,$$
$$b_1^2 + 2\,b_0\,b_2 = a_1\,c_3 - a_2\,c_2 - 3a_3\,c_1.$$

La théorie des déterminants donne immédiatement les équations de condition; mais leur forme ne semble avoir rien de remarquable, non plus que les valeurs de c_1, c_2, et c_3. On peut appliquer la théorie précédente *au folium* de Descartes.

P. Mansion.

---

(1) On peut donner à ces équations, dans le cas le plus général, une forme très remarquable, sur laquelle nous reviendrons plus tard.

SUR LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES PLANES EN GÉNÉRAL. (1)

1. *Définition des transformations birationnelles* (S. 323,351). Il existe un grand nombre de procédés pour déduire, d'une figure plane donnée, une autre figure plane ; ou, comme l'on dit maintenant, pour transformer la première figure dans la seconde. Ainsi, en géométrie élémentaire, on déduit, d'une courbe donnée, une courbe semblable et semblablement placée, en agrandissant, dans un rapport donné, tous les rayons vecteurs de la première, qui émanent d'un point choisi comme centre de similitude. En géométrie descriptive et en perspective, on déduit, d'une courbe plane donnée, une autre courbe qui lui correspond, point par point, en projetant la première sur un plan.

Entre toutes les transformations des figures planes, il y en a qui ont une importance spéciale. Ce sont celles qui ont reçu le nom de transformations *rationnelles* ou mieux *birationnelles*. Elles sont caractérisées analytiquement par la propriété suivante : *les coordonnées rectilignes, cartésiennes ou trilinéaires d'un point d'une première figure, peuvent s'exprimer rationnellement, en fonction des coordonnées du point correspondant d'une seconde figure ; et, réciproquement, les coordonnées des points de la seconde peuvent s'exprimer rationnellement, en fonction des coordonnées du point correspondant de la première.* Il est clair que cette propriété subsiste quand on effectue un changement quelconque de coordonnées dans l'une ou l'autre figure, ou dans toutes deux à la fois, puisque les formules de transformation sont linéaires par rapport à toutes les coordonnées.

D'après ce qui précède : *en général, à un point variable de la première figure, en correspond un seul de la seconde ; et, récipro-*

---

(1) Cette notice est rédigée principalement d'après SALMON, *A treatise on the higher plane curves.* Second edition. Dublin, Hodges, Foster and Co, 1873 ; 400 p. in 8°. Les renvois à cet ouvrage sont indiqués par la lettre S, suivie du n° de l'article. Nous donnons plus bas (n° 6) d'autres indications bibliographiques.

quement, à un point variable de la seconde figure, en correspond un seul de la première. Cette propriété est la base de la théorie purement géométrique des transformations birationnelles. Ces transformations sont dites, pour cela, *monodromes* (en allemand *eindeutig)*, ou *doublement monodromes* (*eindeutig-eindeutig*), ou encore *unicursales.*

Si au point M, considéré comme appartenant à la première figure, correspond le point M′ dans la seconde, et qu'au point M′, considéré comme appartenant à la première figure, corresponde le point M dans la seconde, la transformation est dite *réversible. La transformation par rayons vecteurs réciproques*, est une transformation birationnelle réversible. Il en est de même de toutes les transformations arguesiennes, de M. Saltel.

2. *Equation d'une transformation birationnelle* (S. 351,352). Soient (X, Y) les coordonnées cartésiennes d'un point de la première figure, (x, y, z) les coordonnées trilinéaires du même point, par rapport à un certain triangle de référence ; (X′, Y′), (x', y', z') les coordonnées du point correspondant de la seconde figure, par rapport à d'autres axes et à un autre triangle de référence. Nous entendons ici, par coordonnées trilinéaires d'un point, les distances de ce point aux trois côtés du triangle de référence, *multipliées par des constantes quelconques.* Les distances sont prises positivement dans un sens *quelconque*, sur la perpendiculaire au côté considéré, négativement dans l'autre. Les constantes qui multiplient les distances sont les mêmes pour tous les points de l'une des figures, à un moment donné ; mais elles peuvent être différentes pour l'autre figure ; de plus, elles peuvent changer, pour chacune des deux figures, pendant le cours des calculs.

Par définition, on a simultanément

$$X = F_1(X', Y'),\ Y = F_2(X', Y'), \tag{1}$$

$$X' = f_1(X, Y),\ Y' = f_2(X, Y). \tag{2}$$

F_1, F_2, f_1, f_2 désignant des fonctions rationnelles telles, que l'on puisse rendre les équations (2) identiques en y substituant pour X et Y leurs valeurs (1) ; et inversement. Les fonctions F_1, F_2, f_1, f_2 ne sont pas arbitraires.

Remplaçons, dans les équations (1), X et Y par leurs valeurs en x, y, z ; X′ et Y′ par leurs valeurs en x', y', z'. Les équations

que l'on obtiendra par cette substitution seront homogènes en x, y, z, et en x', y', z'; et, de plus, du premier degré en x, y, z. On pourra donc en déduire les valeurs des rapports $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, en fonction rationnelle et homogène de x', y', z'. On aura ainsi :

$$\frac{x}{U'} = \frac{y}{V'} = \frac{z}{W'}, \qquad (3)$$

U', V', W' étant des fonctions entières et homogènes en x', y', z'. On déduira de même, des équations (2), des relations de la forme :

$$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W}, \qquad (4)$$

U, V, W étant des fonctions entières en x, y, z. Les fonctions U, V, W d'une part, les fonctions, U', V', W' de l'autre, sont loin d'être arbitraires, parce que les équations (3) doivent être équivalentes aux équations (4), et inversement.

Quand on se donne les coordonnées (x, y, z) d'un point variable M de la première figure, les équations (3), ou

$$U'y - V'x = 0, \; U'z - W'x = 0 \qquad (5)$$

représentent deux courbes de degré n, ayant n^2 points d'intersection, distincts ou coïncidants, en supposant U' de degré n en x', y', z' et V' et W', de degré égal ou inférieur à n. Par hypothèse, à un seul point variable M, de la première figure, en correspond un seul M', dans la seconde. Donc (n^2-1) des points d'intersection des courbes (5) doivent être fixes, quels que soient x, y, z. Les courbes représentées par les équations

$$U' = 0, \; V' = 0, \; W' = 0$$

ont donc $(n^2 - 1)$ points d'intersection fixes, distincts ou coïncidants. Les fonctions U', V', W' satisfont à d'autres conditions, dont nous n'avons pas à nous occuper ici. (S. 352 et suiv.)

Si k, l, m sont des constantes, on déduit, des équations (3),

$$\frac{x}{U'} = \frac{y}{V'} = \frac{z}{W'} = \frac{kx + ly + mz}{kU' + lV' + mW'}.$$

Donc, en général, à la droite dont l'équation est

$$kx + ly + mz = 0,$$

correspond la courbe représentée par

$$kU' + lV' + mW' = 0,$$

et inversement ; et cette courbe passe par les $(n^2 - 1)$ points fixes de la seconde figure.

3. *Classification des transformations birationnelles* (S. 351). Il est clair, d'après ce que nous avons dit plus haut sur les points d'intersection des courbes dont les équations sont

$$U' = 0, \; V' = 0, \; W' = 0,$$

que les fonctions U', V', W' sont toutes de degré n. Mais on peut encore le démontrer comme il suit. Admettant que (k_1, l_1, m_1) (k_2, l_2, m_2) (k_3, l_3, m_3) soient des constantes quelconques, posons

$$\begin{aligned} x'' &= k_1 x + l_1 y + m_1 z, & U''' &= k_1 U' + l_1 V' + m_1 W', \\ y'' &= k_2 x + l_2 y + m_2 z, & V''' &= k_2 U' + l_2 V' + m_2 W', \\ z'' &= k_3 x + l_3 y + m_3 z, & W''' &= k_3 U' + l_3 V' + m_3 W'. \end{aligned}$$

On déduira, des équations (3),

$$\frac{x''}{U'''} = \frac{y''}{V'''} = \frac{z''}{W'''}, \tag{6}$$

par la théorie des proportions. Il est clair que, si n est le degré de celle des fonctions U', V', W', qui est de degré le plus élevé, les fonctions U''', V''', W''' peuvent être supposées toutes trois de degré n, en x', y', z'. Si donc l'on prend pour nouveau triangle de référence, dans la première figure, celui dont les côtés ont pour équations :

$$x'' = 0, \; y'' = 0, \; z'' = 0,$$

l'équation (6) exprimera la relation qui existe entre les coordonnées (x'', y'', z'') d'un point M de la première figure, et les coordonnées (x', y', z') d'un point de la seconde : comme on le voit, les trois fonctions U''', V''', W''' sont de même degré. Les points d'intersection des courbes représentées par les équations (3) ou (5), dont $(n^2 - 1)$ sont fixes et le dernier variable, se trouvent également sur les courbes représentées par les équations (6), parce que ces équations sont une suite des premières : la réciproque est vraie, attendu que les équations (3) ou (5) peuvent se déduire des équations (6).

Les dénominateurs U, V, W, dans les équations (4), sont aussi de degré n, si U', V', W' sont de degré n. En effet, aux n points d'intersection de la droite représentée par l'équation

$$k x' + l y' + m z' = 0,$$

avec la courbe d'ordre n, donnée par la relation

$$a\,U' + b\,V' + c\,W' = o,$$

doivent correspondre, dans la première figure, n points d'intersection des lignes dont les équations sont

$$a\,x + b\,y + c\,z = o,$$
$$k\,U + l\,V + m\,W = o.$$

La fonction $k\,U + l\,V + m\,W$ doit donc être de degré n, quels que soient k, l, m, c'est-à-dire que U, V, W doivent être de degré n.

Le degré n des fonctions U, V, etc., permet de classer les transformations, en transformations *linéaires*, *quadratiques, cubiques*, *quartiques,* etc., selon que $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc. Dans les transformations linéaires, à une droite de la première figure, correspond une droite dans la seconde figure. Dans les transformations quadratiques, ce sont des coniques, ayant trois points fixes, qui correspondent aux droites; et ainsi de suite. En particulier, on a appelé *transformations circulaires* celles où des cercles, dans la seconde figure, correspondent à des droites de la première.

4. *Réduction des transformations birationnelles quelconques aux transformations linéaires et quadratiques. Théorème de* NOETHER. (S. 362). Déduisons une figure F_2 d'une autre F_1 par une transformation birationnelle, puis une figure F_3 de la figure F_2, aussi par une transformation birationnelle ; et ainsi de suite, de manière à obtenir une série de figures F_1, F_2, ... F_p, dont chacune soit une transformée birationnelle de la précédente. Il est visible que l'on peut déduire directement la dernière figure de la première, par une transformation birationnelle unique.

NOETHER, et presque en même temps que lui, d'autres géomètres, ont découvert un théorème réciproque, extrêmement remarquable. Ce théorème, que l'on n'a pu étendre aux transformations dans l'espace, est le suivant : « *Toute transformation birationnelle peut être remplacée par une série de transformations linéaires et de transformations quadratiques.* »

Ces dernières transformations, à cause de ce théorème, ont acquis une extrême importance en géométrie supérieure, puisqu'elles peuvent remplacer les transformations birationnelles quelconques. Leur importance est d'autant plus grande qu'elles

sont susceptibles, non seulement d'une exposition analytique très simple, mais aussi d'une interprétation géométrique remarquable. On démontre, en effet, que la transformation linéaire est, au fond, équivalente à la transformation par projection conique, et que la transformation quadratique est équivalente à la transformation arguesienne, étudiée récemment par SALTEL.

5. *Conservation du genre dans les transformations birationnelles. Théorème de* RIEMANN [1]. CLEBSCH a appelé *genre* (*Geschlecht*) d'une courbe d'ordre n, ayant d points doubles (dans le sens général de cette expression), le nombre

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$

Si la courbe a un point multiple d'ordre k, il faut le compter pour $\frac{k(k-1)}{2}$ points doubles. Le nombre p a été appelé, par CAYLEY, *déficience* (*deficiency*) de la courbe, parce qu'il indique le nombre de points doubles qui manquent à la courbe, pour en avoir le nombre maximum $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, qu'une courbe d'ordre n peut avoir.

RIEMANN a démontré que *le genre d'une courbe est le même que celui de toutes ses transformées birationnelles*. Le même théorème a été prouvé autrement par CLEBSCH, ZEUTHEN, BERTINI (Voir S. 364, *Math. Ann.*, t. 3, p. 150). CLEBSCH et NOETHER ont ensuite étendu la notion de genre aux surfaces et aux fonctions algébriques à un nombre quelconque de variables. — Il résulte évidemment, du *théorème de Nœther*, énoncé au n° précédent, que si le théorème de Riemann est établi pour les transformations linéaires et les transformations quadratiques, il sera prouvé pour toutes les transformations birationnelles.

---

[1] Nous empruntons ceci à notre opuscule : *Les Mathématiques en Belgique en* 1872, p. 31. Nous y avons analysé avec soin, en ne nous appuyant que sur la géométrie élémentaire, la transformation arguesienne de M. Saltel. C'est une transformation cubique, d'une grande simplicité, équivalente à deux transformations arguesiennes triangulaires, c'est-à-dire, à deux transformations quadratiques générales.

Grâce au théorème de Riemann, Clebsch a pu classer les courbes par *genres*. Il a démontré que les courbes d'un même genre, par exemple celles qui sont transformées birationnelles les unes des autres, jouissent en général de propriétés analogues, et que leur étude présente des difficultés de même ordre. Ainsi, les courbes de genre *zéro*, ou courbes *unicursales* (droite, coniques, cubiques avec un point double, quartiques avec un point triple, ou trois points doubles), sont telles, que les coordonnées de leurs points peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre variable t, ou, ce qui revient au même, en fonction rationnelle de ce paramètre variable t et d'un radical carré, portant sur une fonction entière du premier ou du second degré en t. Par conséquent, l'aire de ces courbes s'exprime au moyen des fonctions élémentaires (fractions rationnelles, arcs-tangentes et logarithmes). Les courbes de genre *un* (cubiques sans point double, quartiques avec deux points doubles, etc.) sont telles, que les coordonnées de leurs points peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'une variable t et d'un radical carré, portant sur une fonction entière du troisième ou du quatrième degré en t; par conséquent, leur aire dépend des fonctions elliptiques. Les courbes de genre *deux* (quartiques avec un point double, etc.) sont telles, que les coordonnées de leurs points peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'une variable t et d'un radical carré, portant sur une fonction entière du cinquième ou du sixième degré en t; leur aire dépend des fonctions hyperelliptiques les plus simples. Les courbes de genre plus élevé, par exemple, les quartiques quelconques qui sont de genre *trois*, jouissent de propriétés communes, beaucoup plus compliquées (Clebsch und Gordan, *Theorie des Abelschen Functionen*, A. III).

6. *Histoire de la théorie des transformations birationnelles.* Clebsch, dans sa *Notice sur Plücker*, et F. Klein, dans l'*Annuaire mathématique de Berlin* (Forchritte der Mathematik, t. 3, p. 47 et 426) ont donné, sur l'histoire des transformations birationnelles, des détails intéressants, que nous croyons devoir résumer ici.

C'est Poncelet (*Traité des propriétés projectives*, 1822, p. 198) qui s'est occupé, le premier, de la transformation où une conique

correspond à une droite, c'est-à-dire de la transformation quadratique. Tout son ouvrage d'ailleurs, comme plus tard le Mémoire de CHASLES sur l'*homographie* (1830, publié en 1837), est en réalité une étude approfondie de la transformation linéaire. A son tour PLÜCKER parle de la transformation quadratique, dans un court passage d'un article inséré au *Journal de Crelle* (t. 5, 1829); puis MAGNUS en expose la théorie avec soins, en la rattachant à ses premiers principes (1831, *J. de Crelle*, t. 8). STEINER étudiait aussi ces questions vers la même époque, comme on peut le voir dans la préface des *Systematische Entwickelungen* (1832). MOEBIUS et PLÜCKER liu-même (J. de Crelle, t. 11, p. 219) s'occupèrent, en particulier, de la transformation *circulaire*.

En 1863 et 1865, CREMONA donna la théorie générale des transformations birationnelles générales, de façon qu'il est regardé comme le vrai créateur de cette théorie; toutefois RIEMANN avait déjà démontré, en 1857, à propos des fonctions abéliennes, le théorème qui porte son nom. Le théorème de NOETHER (voir ci-dessus n° 4) fut publié par celui-ci, en 1870 (*Nachrichten* de Goettingue, puis *Math. Annalen,* t. 3). CLIFFORD et ROSANES étaient arrivés, de leur côté, au même théorème. Les recherches du premier de ces géomètres, et une théorie générale des transformations birationnelles, se trouvent dans un Mémoire de CAYLEY (*Proceedings of Lond. Math. Soc.*, t. 3, p. 127-180); celles du second dans le Journal de Crelle (t. 73, p. 97-1[illegible]). Les travaux plus récents de CLEBSCH, CREMONA, CAYLEY, NOETHER, ROBERTS, ZEUTHEN etc., sur ce sujet, ont pour but de compléter la théorie générale des transformations planes, et surtout de créer une théorie analogue pour les transformations dans l'espace (¹).

P. MANSION.

(¹) M. DEWULF a résumé les travaux de Cremona et de quelques autres géomètres (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, novembre 1873, t. 5, p. 206-240) ; un travail analogue forme la majeure partie du ch. VIII de SALMON, *Higher plane curves* (p. 301-327).

EXTRAITS ANALYTIQUES.

VI.

SUR LES PARABOLES CUBIQUES.

Les paraboles cubiques, représentées par l'équation

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

ont un point d'inflexion, dont l'abcisse est $-\frac{a}{3}$. Il est en même temps le centre de la courbe. Toute parabole cubique est déterminée par son centre et un autre point quelconque. Si l'ordonnée y de la courbe passe par un maximum, elle passe aussi par un minimum; et les points correspondants sont en ligne droite avec le centre (Stoekly, *Archives de Grunert*, t. 56, p. 180-187). Ces divers théorèmes se démontrent sans peine si l'on place l'origine des coordonnées au point de la courbe dont l'abcisse est $-\frac{a}{3}$. L'équation de la courbe devient

$$y - kx = x^3.$$

La tangente d'inflexion a pour équation $y = kx$, et il n'y a de maximum ou de minimum, pour l'ordonnée, que si k est négatif.

VII.

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE.

1. Si deux des sommets d'un triangle se meuvent sur des lignes droites, tandis que les côtés tournent autour de trois points situés en ligne droite, le troisième sommet décrit aussi une ligne droite (Pappus), et le centre de gravité décrit une cubique unicursale.

2. Si les trois côtés du triangle tournent autour de trois points qui ne soient pas en ligne droite, le lieu décrit par le troisième sommet est une conique (Mac-Laurin), et le centre de gravité décrit une quartique unicursale (Zahradnik, *Archives de Grunert, t.* 56, p. 11-15).

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LA NOUVELLE CORRESPONDANCE.

Question 1.

(N. C. M., p. 31.)

Si un quadrilatère, plan ou gauche, a deux côtés opposés égaux : 1° *Ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés;* 2° *la projection de chacun des premiers côtés, sur la médiane, est égale à la médiane.*

Soit A B C D le quadrilatère donné. Par C, je mène C F égal et parallèle à A B; je tire F D, F A; puis j'abaisse C G perpendiculaire sur F D. Par G, je fais passer une parallèle G H à AF, qui rencontre A D en son milieu H. Une parallèle H I à C G rencontre B C en I. Le parallélogramme I H G C donne I C = H G; or H G est moitié de A F; donc I C est moitié de B C. Ainsi, la médiane I H est égale et parallèle à C G, et fait des angles égaux avec les côtés donnés. Le reste de la démonstration découle immédiatement de ce qui précède.

Scholie. Dans tout paraboloïde hyperbolique, les quatre génératrices (deux de chaque mode), qui se trouvent à une même distance de l'axe de la surface, font, avec cet axe, des angles égaux.

P. S. *abonné.*

Note. M. L. Vanden Broek démontre le théorème d'une manière plus simple, en menant, par les points A, D, I, les droites A K, I K, D L, I L, respectivement parallèles à BC, BA BC, CD, et observant que L H K est une ligne droite; etc.

Question 3.

(N. C. M.. p. 31.)

3. *On prend, sur les côtés d'un triangle* A B C, *trois points* C′, A′, B′, *que l'on joint aux sommets opposés* C, A, B. *Démontrer, par la géométrie élémentaire, que* AA′, BB′, CC′ *sont les hauteurs du triangle* A B C, *si ces droites sont les bissectrices des angles du triangle* A′ B′ C′.

Dans le quadrilatère complet AB′ OC′, la diagonale BC est coupée harmoniquement par les deux autres, en A′ et D. Les droites CB′, A′ B′, BB′, DB′ forment donc un faisceau harmonique. Mais BB′ étant, par hypothèse, bissectrice de l'angle A′B′ C, CB′ est la bissectrice de l'angle adjacent à A′ B′ D; donc B B′ C est un angle droit, ou BB′ est perpendiculaire à AC. Par

la même raison, A A′ est perpendiculaire à B C, et C C′ perpendiculaire à A B. L. VAN DEN BROECK.

Note de la Rédaction. La question précédente peut être généralisée ainsi : *Étant donnés un triangle* A′B′C′ *et un point* O, *trouver un triangle* ABC, *dont les côtés passent par les sommets* A′,B′,C′, *et dont les sommets* A,B,C, *soient situés, respectivement, sur les droites* A′O,B′O,C′O.

E. C.

Question 4.

(N. C. M., p. 31.)

THÉORÈME. *Un ellipsoïde étant donné, on prend pour* tableau *un plan diamétral* AOB ; *et, pour* point de vue, *une extrémité* C *du diamètre conjugué de* AOB. *Cela posé, les perspectives de toutes les coniques tracées sur l'ellipsoïde sont semblables à la section diamétrale* AOB.

COROLLAIRE. *Si* AOB *est une* section circulaire, *auquel cas* C *est un* ombilic, *les perspectives de toutes les coniques tracées sur l'ellipsoïde sont des cercles.* (E. C.)

Il me semble qu'on ne peut pas trouver de démonstration plus simple que celle qui consiste à faire subir successivement, à la figure donnée, les trois transformations suivantes : 1° prendre le plan AOB comme plan horizontal, et changer de direction toutes les ordonnées primitivement parallèles à OC, de manière à les rendre verticales. On aura ainsi un ellipsoïde dont AOB sera une section principale, et C le sommet opposé. 2° augmenter, dans la nouvelle figure, les ordonnées perpendiculaires à l'un des plans principaux passant par OC, dans le rapport du petit axe au grand, de manière à changer le nouvel ellipsoïde, en un ellipsoïde de révolution. 3° changer ce dernier en sphère, par une augmentation analogue des ordonnées relatives au plan horizontal. Dans chacune de ces transformations, les points de la figure, primitivement placés dans un même plan, le seront encore; de sorte qu'une section plane reste une section plane.

Dans la seconde transformation, des ellipses semblables à A O B, et situées dans le plan horizontal, seront transformées en cercles ; et réciproquement si l'on revient de l'ellipsoïde de révolution à l'autre. Ces indications suffisent, je pense, pour ne pas écrire tout au long la démonstration. P. S. *abonné.*

QUESTIONS PROPOSÉES.

7. Soit $B_1 B_2 B_3$ le triangle formé par les polaires des trois points A_1, A_2, A_3 relativement à une conique. On sait que les droites $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$ se coupent en un même point P, et que les côtés des triangles $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ se rencontrent deux à deux sur une même droite P'; on peut donner au point P et à la droite P' les noms de *pôle* et de *polaire* du triangle $A_1 A_2 A_3$, par rapport à la conique. Cela posé, trouver le lieu des pôles et l'enveloppe des polaires d'un triangle fixe, par rapport:

1° aux paraboles inscrites ;
2° aux paraboles circonscrites ;
3° aux hyperboles équilatères inscrites ;
4° aux hyperboles équilatères circonscrites ;
5° aux coniques circonscrites à un même quadrilatère ;
6° aux coniques inscrites à un même quadrilatère.

8. Trouver les axes d'une conique inscrite à un triangle fixe et ayant son pôle en un point donné.

9. Trouver les axes d'une conique circonscrite à un triangle fixe et ayant son pôle en un point donné.

10. Si l'on considère la série des coniques circonscrites à un quadrilatère fixe A B C D, chaque courbe de la série est déterminée par le rapport anharmonique des droites joignant un cinquième point aux sommets du quadrilatère.

Soient ρ, ρ', ρ'' ces rapports pour les coniques représentées par

$$f(x, y) = 0, \ F(x, y) = 0, \ f(x, y) + KF(x, y) = 0:$$

exprimer K en fonction de ρ, ρ', ρ''.

11. Par un point donné, mener une sécante telle, que le segment intercepté entre les côtés d'un angle donné soit vu, d'un autre point donné, sous un angle connu.

12. A un triangle isoscèle donné, inscrire un hexagone équilatéral.

13. Le nombre $(2a)(2b)(2c)abc$ est divisible par 23 et 29.

(E. Hain.)

14. Déterminer x et y de manière que le nombre $1\,2\,3\,4\,xy$ soit divisible par 8 et par 9. (E. Hain.)

15. On joint les sommets A, B, C d'un triangle aux points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2, qui divisent en trois parties égales les côtés opposés. Les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en trois points A′, B′, C′; les droites AA_2, BB_2, CC_2, en trois autres points A″, B″, C″. Démontrer que chacun des triangles A′B′C′, A″B″C″ est le $\frac{1}{7}$ du triangle ABC. (E. Hain.)

16. Soient menées, dans un triangle ABC, par les sommets et le centre de gravité S, les droites AS, BS, CS rencontrant les côtés opposés en a, b, c. Formons, avec les droites Aa, Bb, Cc comme côtés, un triangle MNP. Les rayons R, r, r', r'', r''' des cercles circonscrits aux triangles ABC, MNP, BCS, CAS, ABS satisfont à la relation

$$3\,R^2 r = 4\,r'\,r''\,r'''.$$ (E. Hain.)

17. Soient P, Q, R, les pieds des perpendiculaires abaissées, du centre de gravité d'un triangle ABC, sur les côtés de celui-ci. L'aire du triangle PQR est égale à

$$\frac{4}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right) T;$$

T étant l'aire de ABC, et a, b, c, les longueurs des trois côtés. (E. Hain.)

18. Le triangle ayant pour sommet les pieds des hauteurs du triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle inscrit à ABC, a pour mesure

$$\frac{16\,T^5}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2},$$

T étant l'aire du triangle ABC, et a, b, c, les longueurs des trois côtés. (E. Hain.)

19. Les médianes d'un triangle forment, avec les côtés qu'elles divisent en deux parties égales, des angles dont les cotangentes ont une somme nulle. (Bermann.)

20. Si l'on abaisse, d'un point O, les perpendiculaires OD, OE, OF sur les côtés du triangle ABC, on a

$$\cot ADC + \cot BEA + \cot CFB = 0.$$

(Bretschneider.)

21. Soit un triangle ABC. Par A, menons AD, coupant BC, en D; par D, DE parallèle à AB, coupant AC en E; par E, EF parallèle à BC, coupant AD en M. Le lieu du point M, quand AD se déplace, est une parabole passant par C, tangente en A à AB, et dont l'axe est parallèle à BC. (SILLDORF.)

22. Étant donnés trois points fixes, trouver le lieu d'un quatrième point tel, que les axes des *deux* paraboles passant par ces quatre points, forment entre eux un angle donné (*Concours d'admission à l'École polytechnique.* — 1874).

23. On donne, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées. Déterminer les deux dernières arêtes, de manière que le tétraèdre ait un volume maximum (*Concours général des Lycées de France. — Mathématiques élémentaires.* — 1874).

24. a, b étant deux nombres entiers, décomposer, en *trois carrés entiers*,

$$(1 + a + b + a^2 + ab + b^2)^2. \qquad \text{(E. C.)}$$

25. Trouver une circonférence qui rencontre cinq droites données, parallèles entre elles, et non situées dans un même plan. (E. C.)

26. Si p est un nombre premier, qui ne divise pas le nombre n,

$$C_{np-1,\, p-1} = 1 + \mathcal{M}_p \,.$$

Par exemple,

$$C_{14.4} = \frac{14.13.12.11}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 1001 = 1 + \mathcal{M}.\ 5.$$

(E. C.)

27. Un quadrilatère ABCD, *articulé* en A, B, C, D, a, pour *axe de symétrie*, la diagonale AC. De plus, le côté AB est *fixe*. Cela étant, *le lieu du point de rencontre des côtés* AD, BC *est une ovale de Descartes.* (E. C.)

28. 1° Discuter la courbe représentée par

$$x = e^{t},\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}.$$

2° Prouver que cette courbe est une *hélice caténoïdique.*

3° Prouver que l'*ombre* de cette hélice, sur un certain plan, est une hyperbole équilatère. (E. C.)

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Désirant être reçu bientôt à l'École de Cureghem, je tâche d'acquérir les connaissances mentionnées au programme officiel. Malheureusement pour moi, certains articles de ce programme me paraissent obscurs; et je serais fort embarrassé pour y répondre convenablement. Par exemple, qu'est-ce qu'une *fraction périodique à chiffres décimaux fractionnaires ?* Que signifie *le symbole* o^o ? Comment peut-on *prouver que* $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$? etc. J'ai déjà demandé ces explications à notre professeur ; mais il se déclare aussi incompétent que moi et mes camarades de classe. Si vous pouviez, Monsieur le Rédacteur, donner, dans votre journal, quelques éclaircissements sur ces articles du programme, vous obligeriez infiniment

Votre dévoué serviteur,
EMILE VAN POTT,
Elève de l'Athénée de T.

Note de la Rédaction. — La lettre de notre jeune correspondant m'a fait songer à lire le *Moniteur belge*, du 6 avril 1874. Je croyais savoir, depuis longtemps, de quoi sont capables les fabricants de programmes : j'étais dans une erreur complète ; et, même en ce genre, j'ai beaucoup à apprendre !

Voici quelques-uns des articles du Programme dont il s'agit :

1. *Reconnaître les fractions ordinaires qui, étant réduites en décimales, fournissent ou des fractions exactes ou des fractions périodiques.*
2. *Savoir écrire la génératrice d'une fraction périodique, même quand certains chiffres décimaux sont fractionnaires* (0, 1 1|2 1 1/2 .... ∞).
3. *Formation d'une table de nombres premiers.*
4. *Système métrique complet.*
5. *Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers ; dire le nombre de ses diviseurs.*
6. *Extraire les racines carrée et cubique d'un nombre à une approximation décimale donnée.*
7. *Etablir la règle des signes pour la multiplication.*
8. *Les quatre opérations sur les monômes et les polynômes.*
9. *Étude des symboles* a^o, o^o.
10. *Prouver que* $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ *et prouver directement que*

$$a^{p} = \frac{1}{a^{-p}}.$$

11. *Quand un polynôme devient* o, *en y remplaçant* x *par* a, *démontrer qu'il est divisible par* x—a.

12. *Reconnaître si les divisions* $\frac{x^m - a^m}{x - a}$, ... *sont exactes.*

13. *Discussion de la racine fournie par l'équation* ax — b = o.

14. *Géométrie de l'espace. Connaître l'expression de la surface et du volume des différents polyèdres qu'on y étudie. On s'abstiendra de toute démonstration. Les élèves devront pouvoir figurer au tableau tous ces polyèdres et appliquer à des cas particuliers leurs formules des volumes et des surfaces.*

Laissant de côté, pour un instant, les questions ineptes, on peut déjà conclure, de cet extrait, que les auteurs du programme ne connaissent, ni la grammaire française, ni les premières notions des mathématiques élémentaires. En effet, on ne dit pas : *les racines carrée et cubique*; on ne dit pas : *quand un polynôme devient zéro..., démontrer......* ; on ne dit pas : la *racine fournie* : une équation n'est pas une fournisseuse de racines ! on ne dit pas que $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ *est une division* ; on ne dit pas, surtout : *appliquer à des cas particuliers leurs formules : leurs* se rapporte-t-il à *polyèdres* ou à *élèves* ? etc. etc. Voilà pour la forme : voyons le fond.

A en juger par l'ordre général des questions, il semble que, conformément à l'usage, ce *programme d'examen* est, en même temps, un *programme de cours*. S'il en est ainsi, comment la *réduction des fractions ordinaires en fractions décimales* est-elle placée avant la *théorie des nombres premiers*? Pourquoi le *système métrique* figure-t-il entre la *formation d'une table de nombres premiers* et la *décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers ?* Que signifie cet énoncé : *dire le nombre de ses diviseurs*? Peut-on, à l'inspection d'un nombre, deviner combien il admet de diviseurs ? Comment les honnêtes vétérinaires(1), rédacteurs de ce grotesque programme, établiraient-ils la *règle des signes*, avant d'avoir parlé de la multiplication ? etc., etc.

Arrivons aux questions *ineptes*, et d'abord à celle-ci, qui provoquera l'hilarité chez tous les professeurs d'arithmétique :

2. *Savoir écrire la génératrice d'une fraction périodique, même quand certains chiffres décimaux sont fractionnaires* (0, 1 1/2 1 1/2.....∞).

Comment un chiffre peut-il être *fractionnaire?* Se représente-t-on *un morceau de chiffre*, *un fragment de chiffre?* L'inventeur de la question, aussi *fort* en français qu'en arithmétique, a sans doute voulu dire : *quand certains chiffres décimaux sont remplacés par des fractions*. Mais ce n'est pas tout. Que signifie ce ∞ placé à la fin de la parenthèse ? Est-ce que *l'infini* est un chiffre ? En résumé, si l'on a voulu faire *sommer* la série

---

(1) Je serais fâché que l'on se méprît sur le sens de cette expression. Comme tous les travailleurs, les médecins-vétérinaires sont des hommes utiles: je n'ai donc pas voulu railler une profession respectable.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{20000}+\ldots,$$

pourquoi parler en style d'oracle et en mauvais français ? La Bruyère a toujours raison : « Vous voulez dire qu'il fait chaud ; dites : il fait chaud. »

9. *Etude du symbole* 0^0.

Depuis plus de quarante ans, j'enseigne les diverses parties des mathématiques ; et, je le déclare, il me serait *impossible* de répondre à cette question. *A priori*, le symbole 0^0 ne signifie *rien*, pas plus que le *symbole* $\frac{x}{0}$, inventé autrefois par Libri. Si u, v *étant des fonctions de* x, *qui s'annulent avec cette variable, on a l'équation* $y = u^v$, on peut se proposer de *chercher vers quelle limite tend* y, *quand* x *tend vers zéro?* Mais la solution de ce problème exige la connaissance du calcul différentiel ; et l'on demande, *à de futurs vétérinaires, l'étude de* 0^0 ! Il n'y a qu'un mot pour qualifier cet article du programme : *ineptie* !

10. *Prouver que* $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Si les rédacteurs anonymes possédaient les premières notions de l'algèbre[1], ils sauraient que l'*égalité* $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ *est une définition*. Or, on ne démontre pas une définition !

Assez, pour aujourd'hui, sur ce ridicule Programme officiel, qui donne une idée si exacte de l'état où se trouve, en Belgique, l'enseignement des Mathématiques élémentaires. Une autre fois, nous parlerons des questions proposées dans les Concours généraux. De cette manière, le tableau sera complet.

E. C.

Pau, 4 septembre 1874.

BIBLIOGRAPHIE.

III.

Cours d'Analyse de l'École polytechnique, par M. Ch. Hermite, membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences. Première partie. Paris. Gauthier-Villars, 1873 ; 466 p. in-8°. — Mons. Hector Manceaux. — Prix : 14 francs.

Compte rendu analytique, par M. P. Mansion, professeur à l'U-

---

(1) Depuis mon retour à Liége, j'ai appris que l'inventeur des questions analysées ci-dessus est un *Professeur de mathématiques*. Triste ! Triste ! comme dit Hamlet.

niversité de Gand. (Extrait du *Bullettino di bibliografia et di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t, 6, septembre 1873, Rome) Gand, Hoste, 1874; 80 p. in-8° Prix: 2 francs.

L'ouvrage de M. Hermite, dont nous venons de transcrire le titre, suppose, chez le lecteur, la connaissance de l'algèbre et des éléments de la théorie des intégrales indéfinies.

De tous les manuels analogues, c'est celui qui contient le plus de recherches originales et qui prépare le mieux à la lecture des grands géomètres contemporains. Nous allons en donner une analyse succincte.

Introduction (p. 1-46). Propriétés des fonctions algébriques qui conduisent à la classification des intégrales abéliennes et à la transformation des fonctions elliptiques; notions sur les fonctions simplement et doublement périodiques.

Calcul différentiel. Premiers principes (p. 47-89). Développement des fonctions en séries : exemples remarquables. Différentielles. Changement de variables indépendantes, avec application à des équations différentielles célèbres.

Applications géométriques (p. 90-198). Principes de la méthode des infiniment petits et application à l'aire et à l'arc d'une courbe. Théorie du contact géométrique, des courbes planes ou gauches, des courbes et des surfaces, ou des surfaces entre elles. Toute cette théorie est exposée avec le plus grand soin, et divers cas singuliers sont signalés et discutés. — Théorie de la courbure des courbes planes ou gauches, et des lignes tracées sur une surface. — Courbes et surfaces enveloppes.

Applications analytiques (p. 199-229). Applications du théorème de Taylor à la recherche des vraies valeurs des expressions indéterminées et à la théorie des maxima et minima.

Formation des équations différentielles. Ce dernier sujet est traité avec plus d'étendue que les précédents. L'auteur fait connaître diverses équations différentielles remarquables.

Calcul intégral. Premiers principes(p. 231-280). Dans cette section, l'ouvrage de M. Hermite surpasse tous les autres traités connus, à cause des belles recherches originales qu'il y a fait entrer. En voici le contenu :

Remarques sur la notion d'intégrale définie. Théorie des courbes unicursales. Détermination directe de la partie algébrique de l'intégrale d'une fraction rationnelle. Classification des intégrales hyperelliptiques. Détermination directe de la partie algébrique et de la partie transcendante de l'intégrale d'une différentielle irrationnelle où entre un seul radical carré, portant sur une expression du second degré. Intégration directe des différentielles transcendantes qui pourraient devenir algébriques et s'intégrer au moyen des fonctions élémentaires. Chaque théorie est accompagnée d'exemples extrêmement bien choisis.

Applications géométriques (p. 381-439). Les matières traitées sont les mêmes que celles des autres manuels, mais on y trouve, en outre: 1° de nouveaux détails sur les courbes unicursales et sur le calcul de l'aire de celles de ces courbes qui sont du troisième ou même, dans certains cas, du quatrième degré ; 2° une notice sur les courbes du genre *un*, du troisième et du quatrième degré; 3° une exposition très simple de la théorie des courbes de Serret, dont l'arc s'exprime par la première intégrale elliptique. L'ouvrage est terminé par un chapitre sur *l'évaluation des intégrales définies* (p. 439-455). C'est un exposé élémentaire de la célèbre méthode de Gauss. M. Hermite fait connaître, en particulier, une méthode nouvelle pour déterminer la valeur approchée des intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ce qui précède suffira, nous l'espérons, pour donner aux lecteurs une idée des richesses que M. Hermite a condensées dans son Cours d'Analyse[1]. P. M.

---

(1) Nous en avons publié un résumé étendu, où toutes les théories principales sont suffisamment ébauchées pour qu'un lecteur attentif puisse les reconstruire sans trop de peine. Ce résumé peut servir de recueil d'exercices pour les bons élèves de nos écoles spéciales, surtout pour les candidats en sciences mathématiques. P. M.



SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)^m dx$,

par J. L. W. Glaisher, M. A., F. R. A. S.,

Professeur à l'Université de Cambridge.

La présente note nous a été suggérée par la belle démonstration de M. Hermite, relative à cette intégrale, insérée à la page 33 de la *Nouvelle Correspondance.*

Considérons l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{(a-\cos x)^2 - \xi^2 \sin^2 x},$$

a étant supposé > 1 ; et développons la quantité sous le signe intégral, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{a}$. On a :

$$\frac{\sin^2 x}{(a-\cos x)^2 - \xi^2 \sin^2 x} =$$

$$\frac{\sin x}{2\xi}\left[\frac{1}{a-\cos x - \xi \sin x} - \frac{1}{a - \cos x + \xi \sin x}\right].$$

Dans le second membre, le coefficient de $\frac{1}{a^n}$ est

$$\frac{\sin x}{2\xi}\left[(\cos x + \xi \sin x)^{n-1} - (\cos x - \xi \sin x)^{n-1}\right].$$

Si n est impair, tous les termes, dans le développement de cette expression, contiennent des puissances impaires de $\cos x$; et, après l'intégration entre les limites 0 et π, le coefficient de $\frac{1}{a^n}$ s'évanouit. Ainsi, il suffit de considérer les puissances paires de $\frac{1}{a}$, comme on peut le démontrer très simple-

ment aussi, par la méthode de M. Mansion, en écrivant $\pi - x$ à la place de x dans l'intégrale.

Mettons donc $2n$ à la place de n : nous voyons que le coefficient de ξ^{2r}, dans le développement de

$$\frac{\sin x}{2\xi}\left[(\cos x + \xi \sin x)^{2n-1} - (\cos x - \xi \sin x)^{2n-1}\right],$$

est

$$\frac{(2n-4)(2n-2)\ldots(2n-2r-1)}{1.\,2.\,\ldots\,(2r+1)} \cos^{2n-2r-2} x \sin^{2r+2} x.$$

Cette quantité, multipliée par dx, puis intégrée entre les limites 0 et π, devient

$$\pi\frac{(2n-1)\ldots(2n-2r-1)}{1.2.\ldots(2r+1)} \times \frac{2n-2r-3}{2n}.\frac{2n-2r-5}{2n-2}\ldots\frac{1}{2r+4} \times \frac{2r+1}{2r+2}.\frac{2r-1}{2r}\ldots\frac{1}{2}$$

$$= \pi\, \frac{2^r[(n-1)(n-2)\ldots(n-r)]\,[1.3\ldots(2n-1)]\,[1.3\ldots(2r+1)]}{2^r[1.2\ldots.r]\,[1.3\ldots.(2r+1)]\,[2.4\ldots.2n]} =$$

$$\pi\, \frac{(n-1)\ldots(n-r)}{1.2\ldots.r} \times \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots.2n} = \frac{(n-1)\ldots(n-r)}{1.2\ldots.r} \int_0^\pi \sin^{2n} x dx.$$

C'est pourquoi le coefficient de $\frac{1}{a^n}$ est égal à

$$(1+\xi^2)^{n-1} \int_0^\pi \sin^{2n} x dx.$$

Par conséquent

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{(a-\cos x)^2 - \xi^2 \sin^2 x} = \int_0^\pi \left[\frac{\sin^2 x}{a^2} + \frac{(1+\xi^2)\sin^4 x}{a^4} + \text{etc.}\right] dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{a^2 - (1+\xi^2)\sin^2 x} = \frac{\pi}{1+\xi}\left[-1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1 - \xi^2}}\right];$$

ce qui donne, en posant $1+\xi^2 = \varepsilon$, le résultat de M. Hermite (N. C., p. 35) :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1 - 2a\cos x + a^2 - \varepsilon \sin^2 x} = \frac{\pi}{\varepsilon}\left[-1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \varepsilon}}\right]$$

En écrivant $\frac{1}{a}$ à la place de a, et $\frac{\varepsilon}{a^2}$ à la place de ε, nous trouvons que l'on a, dans le cas où a est < 1,

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1-2a\cos x+a^2-\varepsilon\sin^2 x} = \frac{\pi}{\varepsilon}\left[-1+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right];$$

ce qui est l'autre résultat de M. Hermite.

En égalant, avec M. Hermite, les coefficients des diverses puissances de ε, dans le développement des deux membres de cette égalité, nous voyons que, pour $a < 1$,

$$\int^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)^n dx = \frac{1.3\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n}\pi = \int_0^\pi \sin^{2n} x dx.$$

La proposition de M. Liouville (N. C., p. 24) est donc démontrée, dans le cas où

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

qui contient presque toutes les formes utiles de F, $\log x$ excepté, cette fonction ne pouvant pas être développée suivant les puissances croissantes de x.

Il est remarquable que, de l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{(a-\cos x)^2+\xi\sin^2 x} = \frac{\pi}{\xi+\sqrt{\xi}}, \ (a<1)$$

nous déduisons, en intégrant par rapport à ξ,

$$\int_0^\pi \log\left[(a-\cos x)^2+\xi\sin^2 x\right] dx = 2\pi\log\frac{1+\sqrt{\xi}}{2}.$$

Londres, 12 janvier 1875.

ÉQUATION FOCALE DES CONIQUES, EN COORDONNÉES TANGENTIELLES.

1. Pour exprimer qu'une droite et une conique, respectivement représentées par

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx+ny+p)^2, \qquad (2)$$

sont tangentes l'une à l'autre, il suffit d'identifier l'équation (1) avec celle de la tangente à la conique, au point (x', y'), et d'éliminer x', y', entre les *équations de condition* obtenues et la relation

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = (mx'+ny'+p)^2.$$

Si k désigne un facteur indéterminé, on trouve d'abord :

$$x' - \alpha - m\,(mx'+ny'+p) = k\,A,$$
$$y' - \beta - n\,(mx'+ny'+p) = k\,B,$$
$$\alpha\,(x'-\alpha) + \beta\,(y'-\beta) + p\,(mx'+ny'+p) = -\,k\,C;$$

d'où, en considérant $x'-\alpha$, $y'-\beta$, $mx'+ny'+p$ comme des inconnues, et en posant

$$A\alpha + B\beta + C = M, \quad m\alpha + n\beta + p = N :$$
$$mx' + ny' + p = -\,k\,\frac{M}{N},$$
$$x' - \alpha = k\left(A - m\,\frac{M}{N}\right),\ y' - \beta = k\left(B - n\,\frac{M}{N}\right).$$

Par conséquent, la relation cherchée est

$$\left(A - m\,\frac{M}{N}\right)^2 + \left(B - n\,\frac{M}{N}\right)^2 = \frac{M^2}{N^2};$$

ou

$$N^2\,(A^2+B^2) - 2MN\,(Am+Bn) + M^2\,(m^2+n^2-1) = 0. \quad (3)$$

Nous allons en faire l'application à deux problèmes qui, traités par le calcul, présentent certaines difficultés.

2. *Trouver le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données.*

Soient :

$$x\cos\mu_1 + y\sin\mu_1 - p_1 = 0,$$
$$x\cos\mu_2 + y\sin\mu_2 - p_2 = 0,$$
$$x\cos\mu_3 + y\sin\mu_3 - p_3 = 0$$

les équations des droites données. Si l'on représente, par l'équa-

tion (2), la parabole variable, les conditions du problème sont :

$$m^2 + n^2 = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\delta_1} &= \frac{m \cos \mu_1 + n \sin \mu_1}{N}, \\ \frac{1}{\delta_2} &= \frac{m \cos \mu_2 + n \sin \mu_2}{N}, \\ \frac{1}{\delta_3} &= \frac{m \cos \mu_3 + n \sin \mu_3}{N}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

δ_1, δ_2, δ_3 représentant les quantités $\alpha \cos \mu_1 + \beta \sin \mu_1 - p_1$, etc.

L'élimination de $\frac{m}{N}$, $\frac{n}{N}$, entre les équations (4), donne, pour le lieu cherché,

$$\frac{\sin(\mu_2 - \mu_3)}{\delta_1} + \frac{\sin(\mu_3 - \mu_1)}{\delta_2} + \frac{\sin(\mu_1 - \mu_2)}{\delta_3} = 0;$$

ce qui est l'équation, bien connue, du *cercle circonscrit au triangle formé par les droites données* [1].

3. *Trouver le lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données, et dont le centre est donné.*

Soient (a, b) les coordonnées du centre, et

$$x \cos \mu_1 + y \sin \mu_1 - p_1 = 0,$$
$$x \cos \mu_2 + y \sin \mu_2 - p_2 = 0,$$

les équations des droites données. Les conditions du problème s'expriment par :

$$a - \alpha = m(ma + nb + p), \quad (5)$$
$$b - \beta = n(ma + nb + p), \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} N^2 - 2N\delta_1 (m \cos \mu_1 + n \sin \mu_1) + \delta_1^2 (m^2 + n^2 - 1) = 0, \\ N^2 - 2N\delta_2 (m \cos \mu_2 + n \sin \mu_2) + \delta_2^2 (m^2 + n^2 - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

---

[1] Ce résultat est évident *a priori* si l'on se rappelle les deux théorèmes suivants :

1° *Le lieu des projections du foyer, sur les tangentes à la parabole, est la tangente au sommet* (*Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome I, p. 423) ;

2° *Les pieds des perpendiculaires abaissées, d'un point d'une circonférence, sur les côtés d'un triangle inscrit, sont sur une même droite* (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, p. 30). **E. C.**

Pour obtenir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer m, n, p entre les relations (5), (6), (7). Posons

$$ma + nb + p = \lambda, \qquad (8)$$

λ étant une inconnue auxiliaire.

Des équations (5), (6) et (8), l'on tire

$$m = \frac{a-\alpha}{\lambda}, \quad n = \frac{b-\beta}{\lambda}, \quad p = \lambda - \frac{a(a-\alpha)+b(b-\beta)}{\lambda};$$

par conséquent :

$$\left.\begin{aligned} m^2+n^2-1 &= \frac{(a-\alpha)_2+(b-\beta)^2}{\lambda^2} - 1 = \frac{R^2-\lambda^2}{\lambda^2},\\ N = m\alpha + n\beta + p &= -\frac{R^2-\lambda^2}{\lambda},\\ m\cos\mu_1 + n\sin\mu_1 &= \frac{\delta'_1-\delta_1}{\lambda},\\ m\cos\mu_2 + n\sin\mu_2 &= \frac{\delta'_2-\delta_2}{\lambda}; \end{aligned}\right\} (9)$$

R^2, δ'_1, δ'_2 désignant $(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2$,
$a\cos\mu_1 + b\sin\mu_1 - p_1$, $a\cos\mu_2 + b\sin\mu_2 - p_2$.

Au moyen des valeurs (9), les équations (7) deviennent :

$$R^2 - \lambda^2 + (2\delta'_1-\delta_1)\,\delta_1 = 0,$$
$$R^2 - \lambda^2 + (2\delta'_2-\delta_2)\,\delta_2 = 0;$$

et l'élimination de λ^2 donne :

$$2(\delta_1\delta'_1-\delta_2\delta'_2) - (\delta_1^2-\delta_2^2) = 0,$$

ou

$$(\delta_1-\delta'_1)^2 - (\delta_2-\delta'_2)^2 = \delta'^2_1 - \delta'^2_2. \qquad (A)\ [1]$$

On peut considérer δ_1, δ_2 comme les coordonnées du foyer [2], et δ'_1, δ'_2 comme celles du centre ; alors on conclut facilement, de l'équation précédente (A), que le lieu cherché est une hyperbole équilatère, concentrique avec toutes les coniques, et admettant un système de diamètres conjugués parallèles aux droites données.

---

[1] On arrive immédiatement à la relation (A), et par suite à l'équation du lieu, en s'appuyant sur ce théorème : *Le lieu des projections du foyer, sur les tangentes à une ellipse ou à une hyperbole, est une circonférence*, et en *construisant le lieu par points* (*Manuel des candidats*, tome I, p. 481). E. C.

[2] Ce sont les distances de ce point aux droites données. J. N.

4. *Remarque.* Le problème est résolu, pour le cas de deux tangentes rectangulaires, dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*. La méthode employée par M. Catalan, et reproduite par M. Falisse [1], me paraît fautive, bien que, par suite d'un hasard heureux, le résultal final soit exact. En effet, l'auteur ramène la recherche du lieu à l'élimination de λ et p entre les équations

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^2 - p\lambda - [a(a-\alpha) + b(b-\beta)] = 0,\\ (p^2-\beta^2)\lambda^2 + 2\alpha p(a-\alpha)\lambda + (\alpha^2+\beta^2)(a-\alpha)^2 = 0,\\ (p^2-\alpha^2)\lambda^2 + 2\beta p(b-\beta)\lambda + (\alpha^2+\beta^2)(b-\beta)^2 = 0.\end{array}\right\} (P)$$

« Or, dit-il, les équations (P), dans lesquelles λ est l'inconnue, doivent être identiques ; donc

$$2\frac{\alpha p(a-\alpha)}{p^2-\beta^2} = 2\frac{\beta p(b-\beta)}{p^2-\alpha^2} = -p\,; \text{ » } (Q)$$

et l'élimination de p, entre les équations (Q), donne la relation cherchée.

Observons d'abord qu'*il suffit* que, pour une même valeur de p, les équations (P) aient une seule racine commune. D'ailleurs, si elles étaient *identiques*, on aurait les trois résultats différents:

$$2\alpha(a-\alpha)[a(a-\alpha) + b(b-\beta)] = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)^2,$$
$$2\beta(b-\beta)[a(a-\alpha) + b(b-\beta)] = (\alpha^2+\beta^2)(b-\beta)^2,$$
$$\frac{\alpha(a-\alpha)}{\beta(b-\beta)} = \frac{(a-\alpha)^2}{(b-\beta)^2}. \text{ [2]}$$

5. On peut parvenir à une équation tangentielle [3] remarquable, en modifiant, comme il suit, les calculs du § 1.

L'origine étant au foyer, soient

$$Ax + By - 1 = 0,$$
$$mx + ny - 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 = p^2(mx + ny - 1) \text{ [3]}$$

les équations d'une tangente, de la directrice et de la conique.

---

[1] *Cours de Géométrie analytique.*

[2] Probablement, la solution dont il s'agit, a été rédigée avec trop de précipitation. Quoiqu'il en soit, les objections de M. Neuberg me semblent très-justes. E. C.

[3] J'admets *coordonnées tangentielles* ; mais *équation tangentielle* est une ellipse bien forte. Dirait-on : *équation rectiligne ?* E. C.

En identifiant la première avec celle de la tangente au point (x', y'), on trouve

$$x' - mp^2 (mx' + ny' - 1) = k\,A,$$
$$y' - np^2 (mx' + ny' - 1) = k\,B,$$
$$p^2 (mx' + ny' - 1) = k\ ;$$

d'où

$$mx' + ny' - 1 = \frac{k}{p^2},\ x' = k\ (A - m),\ y' = k\ (B - m).$$

Par suite, en vertu de la relation

$$x'^2 + y'^2 = p^2 (mx' + ny' - 1)^2,$$

on a

$$(A - m)^2 + (B - n)^2 = \frac{1}{p^2}. \qquad (10)$$

Cette équation offre la plus grande analogie avec celle de la circonférence : A, B remplacent les coordonnées courantes x, y ; et m, n remplacent celles du centre. Aussi peut-on regarder cette équation (10) comme exprimant un mode de génération des coniques, au moyen de la circonférence.

En effet, considérons une circonférence ayant pour centre le foyer de la conique et représentée par l'équation :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Soient α, β les coordonnées du pôle de la droite (A, B) par rapport à cette circonférence ; μ, ν les coordonnées du pôle de la directrice (m, n). On trouve facilement :

$$A = \frac{\alpha}{R^2},\ B = \frac{\beta}{R^2},\ m = \frac{\mu}{R^2},\ n = \frac{\nu}{R^2}\ ;$$

de sorte que l'équation (10) devient :

$$(\alpha - \mu)^2 + (\beta - \nu)^2 = \frac{R^4}{p^2}.$$

Elle est donc la traduction analytique de ce beau théorème de Poncelet :

La polaire réciproque d'une circonférence C, *par rapport à une autre circonférence* C', *est une conique ayant pour foyer le centre de* C' *et pour directrice la polaire du centre de* C.

Pour terminer, observons que la constante p est le paramètre de la conique.

J. NEUBERG.

EXTRAITS ANALYTIQUES.

VIII.

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES.

1. Appelons x la première moitié, y la seconde moitié de la période d'une fraction décimale périodique simple, cette période ayant $2r$ chiffres. Supposons, en outre, que la fraction génératrice ait la forme

$$\frac{9x+a}{9\,(10^r+1)}. \qquad (1)$$

On aura

$$\frac{9x+a}{9(10^r+1)} = \frac{x}{10^r} + \frac{y}{10^{2r}} + \frac{x}{10^{3r}} + \text{etc.};$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$x + y = a \times 1111...., \qquad (2)$$

le nombre des 1 étant r. On doit remarquer que y peut être négatif et $a \geqq 10$. La réciproque de ce théorème est vraie.

On déduit de là un moyen rapide pour mettre, sous forme de fractions ordinaires, les fractions périodiques simples dont la période xy satisfait à la condition (2), et de réduire, en fractions périodiques simples, les fractions ordinaires de la forme (1). Ce moyen réussit surtout si a est divisible par 3 ou par 9.

Exemples :

I. $0,123654\ 123654.... = \dfrac{9.123+7}{9(10^3+1)} = \dfrac{1114}{9009}$,

$0,7865\ 7865\ .... = \dfrac{9.78+13}{9(10^2+1)} = \dfrac{715}{909}$.

$0,000801999198\ 000801999198....$

$$= \frac{9.801+9}{9(10^6+1)} = \frac{802}{100001}.$$

II. $\dfrac{1082}{9009} = \dfrac{9.120+2}{9.(10^3+1)} = 0,120102120102...,$

$\dfrac{526}{909} = \dfrac{9.58+4}{9(10^2+1)} = 0,58\bar{1}\bar{4}\ \ 58\bar{1}\bar{4}.... = 0\ 5786\ 5786..,$

$$\frac{226}{9009} = \frac{9.24+10}{9(10^3+1)} = 0{,}024a86\ 24a86\ldots.$$

$$= 0{,}025086\ 025086.$$

Dans le dernier exemple, $a = 10$; dans le précédent, $\overline{1}$ et $\overline{4}$ sont écrits à la place de -1 et -4.

2. Dans le cas où a est divisible par 9, on peut remplacer l'expression (1) par

$$\frac{x+1}{10^r+1}. \qquad (3)$$

Les fractions de cette espèce se mettent immédiatement sous forme de fraction périodique, comme nous l'avons déjà fait remarquer, puisque

$$x + y = 9999\ldots.$$

dans le cas actuel. Ainsi

$$\frac{15679}{100001} = 0{,}1567884321\ 1567884321\ldots.$$

Il en est de même, par suite, pour toute fraction dont le dénominateur est $\frac{1}{m}$ de 10^r+1. En multipliant, en effet, les deux termes de cette fraction par m, on la ramène à la forme (3). Pour réduire les fractions de cette espèce, en fraction périodique, il suffit donc de chercher r chiffres de la période ; les r autres sont les compléments de ceux-ci, par rapport à 9.

Exemples. $10^3+1 = 1001 = 7\times11\times13$. Il en résulte que les fractions

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{77},\ \frac{1}{91},\ \frac{1}{143}$$

jouissent toutes de la propriété exprimée par l'égalité (2). Ainsi

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ldots;\quad 142+857 = 999,$$

$$\frac{1}{11} = 0{,}090909\ 090909\ldots;\quad 090+909 = 999,$$

$$\frac{1}{143} = 0{,}006993\ 006993\ldots;\quad 006+993 = 999.$$

Pour $\frac{1}{11}$, on voit que le nombre des chiffres de la période

est en réalité moindre que r ; r est donc simplement une limite supérieure du nombre des chiffres de la période.

3. Si l'on pose

$$\frac{9x+a}{9(10^r+1)} = \frac{N}{D} = \frac{x}{10^r} + \frac{R}{D.10^r},$$
$$x + y = a\,(10^r-1),$$

on trouve

$$R + N = a\,(10^r+1).$$

Exemple :

$$\frac{71\,635}{90\,009} = \frac{7\,958}{10\,000} + \frac{58\,378}{9.(10^4+1)10^4}.$$

on a : $71\,635 + 58\,378 = 13(10\,001)$.

(Broda, *Archives de Grunert*, t. 56, p. 85-98.)
(P. M)

—

IX.

RACINE CUBIQUE D'UNE EXPRESSION IMAGINAIRE.

Si

$$\sqrt[3]{a+bi} = x+yi,\ i = \sqrt{-1},$$

on a :

$$x^3 - 3xy^2 = a,$$
$$3x^2y - y^3 = b.$$

Elevant au carré ces équations, les ajoutant, puis extrayant la racine cubique du résultat, il vient

$$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{a^2+b^2}. \qquad (1)$$

Cette équation, combinée avec les précédentes, donne deux équations du troisième degré, pour déterminer x et y. Si x_1 et y_1 sont deux racines de ces équations, satisfaisant à l'équation (1), on trouve :

$$\sqrt[3]{a+bi} = x_1 + y_1\,i$$
$$= \frac{-x_1+y_1\sqrt{3}}{2} - \frac{x_1\sqrt{3}+y_1}{2}\,i$$
$$= \frac{-x_1-y_1\sqrt{3}}{2} + \frac{x_1\sqrt{3}-y_1}{2}\,i.$$

Exemple. Si $a = 2$, $b = 11$, on a $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

(Simony, *Archives de Grunert*, t. 55, p. 72-76.) (P. M)

X.

SUR LES DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

1. On peut mettre l'*équation de la tangente*, à une courbe plane quelconque, sous la forme

$$y \cos u - x \sin u = \varphi(u), \qquad (1),$$

x et y étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe; u, l'angle de la tangente avec l'axe des x; $\varphi(u)$, la distance de cette tangente à l'origine.

La courbe étant l'enveloppe de ses tangentes, on en trouvera l'équation en éliminant u entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à u:

$$-y \sin u - x \cos u = \varphi'(u). \qquad (2)$$

Cette seconde équation représente la *normale* à la courbe, au point de contact; car c'est l'équation d'une perpendiculaire à la tangente, passant par le point de contact.

La *développée* de la courbe, étant l'enveloppe de la normale, est représentée par l'équation (2) et la dérivée de celle-ci :

$$-y \cos u + x \sin u = \varphi''(u). \qquad (3)$$

De même, *les développantes* de la courbe primitive devant avoir pour normales les tangentes à celle-ci, seront représentées par l'équation (1) et la suivante, qui en est l'intégrale

$$y \sin u + x \cos u = C + \int \varphi(u)\, du. \qquad (4)$$

En employant les dérivées à indices négatifs pour indiquer des intégrales, et représentant l'équation (1) par $U = 0$ ou $D^0U = 0$, on peut résumer les résultats qui précèdent, dans le tableau suivant :

$$\text{Courbe donnée}\left\{\begin{array}{l} D^{-1}U = 0, \\ D^0\,U = 0, \\ D^1\,U = 0, \\ D^2\,U = 0. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} D^{-1}U = 0, \\ D^0\,U = 0, \end{array}\right\} \text{Développante.} \\ \left.\begin{array}{l} D^1\,U = 0, \\ D^2\,U = 0. \end{array}\right\} \text{Développée.} \end{array}$$

De même, la $m^{\text{ième}}$ développée est donnée par les équations

$$D^mU = 0, \quad D^{m+1}U = 0;$$

et il est tout aussi facile d'écrire les équations de la m[ième] développante.

2. Le *rayon de courbure*, de la courbe donnée, est la distance des droites représentées par les équations (1), (2), droites dont les distances à l'origine sont φ et $-\varphi''$. Donc

$$\rho = \varphi(u) + \varphi''(u).$$

De même, les rayons de courbure $\rho_1, \rho_2, \ldots,$ des développées successives, sont donnés par les formules

$$\rho_1 = \varphi'(u) + \varphi'''(u),$$
$$\rho_2 = \varphi''(u) + \varphi^{\text{iv}}(u),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

et celui de la développante, par la formule

$$\rho_{-1} = \int \varphi(u)\, du + \varphi'(u).$$

La première de ces valeurs s'obtient par un calcul direct; les autres s'obtiennent au moyen des formules

$$\frac{d\rho}{du} = \rho_1,\ \frac{d\rho_1}{du} = \rho_2, \ldots,\ \frac{d\rho_{-1}}{du} = \rho\ ;$$

celles-ci se déduisent de la définition du rayon de courbure et des relations connues :

$$d\rho = ds_1,\ d\rho_1 = ds_2,\ \ldots,\ d\rho_{-1} = ds,$$

entre les rayons de courbure, et les arcs s, s_1, s_2... de la courbe et de ses développées.

On a, à cause de ces mêmes relations, pour les valeurs des arcs $s, s_1, s_2, \ldots$:

$$s = \int \varphi(u)\, du + \varphi'(u),$$
$$s_1 = \varphi(u) + \varphi''(u),$$
$$s_2 = \varphi'(u) + \varphi'''(u), \text{ etc.}$$

3. La *podaire*, relativement à l'origine des coordonnées, de la courbe donnée par les équations (1) (2), c'est-à-dire, le lieu des projections de ce point sur les tangentes, est représentée par l'équation (1) et par l'équation

$$y \sin u + x \cos u = 0,$$

qui est celle d'une parallèle à la normale, menée par l'origine.

L'équation (2), avec

$$y \cos u - x \sin u = \varphi(u) + C,$$

C étant une constante, donne la *courbe parallèle* à celle qui est représentée par les équations (1) et (2), c'est-à-dire la courbe ayant mêmes normales et par suite même développée.

4. L'emploi de la fonction $\varphi(u)$ permet de résoudre sans peine divers problèmes, en apparence très compliqués, et d'établir divers théorèmes que l'on démontrerait moins facilement d'une autre manière. Exemples :

1° Trouver une courbe dont le rayon de courbure et ceux de ses développées, jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, soient liés par une équation linéaire.

2° La *spirale logarithmique* est la seule courbe qui soit coupée, sous un angle constant, par la droite menée, de chacun de ses points, au centre de courbure de sa développée.

3° Parmi les courbes parallèles à la courbe dont le rayon vecteur, issu d'un point fixe, passe constamment par le centre de courbure de sa développée, se trouvent celle dont le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur. L'arc de cette courbe parallèle est proportionnel à celui de sa podaire. (NICOLAÏDÈS, *Analectes, ou Mémoires et notes sur les diverses parties des Mathématiques*, livraison septième, p. 178-194. Athènes. 1872.) (P. M)

—

XI.

LES CUBIQUES UNICURSALES SONT DES CISSOÏDES.

Les cubiques *unicursales*, c'est-à-dire celles qui ont un point *double*, un point *isolé*, ou un point de *rebroussement*, peuvent être déduites des coniques, comme la *cissoïde de Dioclès* est déduite du cercle.

Soient données une conique C et une droite P, représentées par les équations

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0,$$
$$mx + ny + p = 0\,;$$

l'origine des coordonnées étant un point O quelconque de la conique. Menons, par O, une droite Q coupant C en N et P en M ; puis portons sur cette droite, à partir de M, dans le sens MO, une longueur ML égale à ON. Le lieu du point L, quand la droite Q tourne autour du point O, est une cubique représentée par les équations

$$y = ux,$$
$$x = -\frac{p}{m+nu} + \frac{d+eu}{a+bu+cu^2};$$

$y = ux$ étant l'équation de la droite Q. Eliminant u, on trouve

$$(ax^2+bxy+cy^2)(mx+ny+p) - (mx+ny)(dx+ey) = 0.$$

Toute cubique ayant un point double à l'origine a une équation de la forme

$$a_1x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1y^3 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 = 0,$$

qui peut être identifiée à la précédente.

Pour $b^2-4ac>0$, la cubique a trois asymptotes réelles ; pour $b^2-4ac<0$, elle a deux asymptotes imaginaires et une réelle ; si $b^2-4ac=0$, il y a deux asymptotes réelles, dont l'une est la limite des deux asymptotes, réelles ou imaginaires, des cas précédents.

Si P coupe C en A et en B, O est un point double de la cubique ; les tangentes en ce point sont OA, OB. Si P touche C en E, O est un point de rebroussement de la cubique : la tangente en O est OE. Enfin si P ne rencontre C en aucun point réel, O est un point isolé. (K. Zahradnik, *Archives de Grunert*, t. 56, p. 8-10.) (P. M)

—

XII.

CONSTRUCTION DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME OU DU TROISIÈME DEGRÉ, AU MOYEN D'UNE PARABOLE FIXE. TRISECTION DE L'ANGLE.

1. Les ordonnées des points d'intersection de la parabole et du cercle représentés par les équations

$$y^2 = 2x,$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

sont les racines réelles de l'équation

$$\left(\frac{y^2}{2} - a\right)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (1)$$

On peut identifier celle-ci avec une équation quelconque du quatrième degré :

$$z^4 + Az^2 + Bz + C = 0, \qquad (2)$$

pourvu que l'on pose, d étant arbitraire :

$$y = dz,$$

$$\frac{1-a}{d^2} = \frac{A}{4}, \quad \frac{8b}{d^3} + B = 0, \quad \frac{a^2+b^2-r^2}{d^2} = \frac{C}{4}.$$

On trouve, au moyen de ces relations, des valeurs réelles pour a, b, r, excepté si l'équation donnée n'a pas de racines réelles, comme on le voit au moyen de l'équation (1).

Pour trouver les racines de l'équation du troisième degré

$$z^3 + Az + B = 0,$$

on suppose, dans les calculs précédents, $C = 0$. Dans ce cas, $a^2 + b^2 - r^2 = 0$; autrement dit, le cercle variable passe par l'origine des coordonnées, ou par le sommet de la parabole.

2. Considérons l'équation

$$z^3 - \frac{3}{4} z = \frac{1}{4} \cos 3\varphi,$$

à laquelle conduit la trisection de l'angle 3φ ; les racines sont

$$z = \cos\varphi, \quad z = \cos\left(\varphi \pm \frac{2}{3}\pi\right).$$

On trouve, dans le cas actuel, en fesant $d = 4$:

$$a = 4, \; b = 2\cos 3\varphi.$$

On est ainsi conduit à la construction suivante. Sur l'axe OX, porter une longueur OM = 4 ; de ce point comme centre, avec un rayon égal à 2, décrire un cercle ; par le point M, élever une perpendiculaire MN, à OM ; mener une droite MP fesant avec MN un angle égal à 3φ, et coupant le cercle en P ; enfin, de P, abaisser une perpendiculaire PQ sur MN. Le point Q est le centre du cercle passant par O, et coupant la parabole en trois points, dont les ordonnées sont le quadruple des racines de l'équation donnée. (R. Hoppe, *Archives de Grunert*, t. 56, p. 110-112.)

XIII.

SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

—

1. *Construction nouvelle du pentagone régulier et du décagone régulier.* Soient, dans une circonférence ayant le point O pour centre, AOB, COD, deux diamètres perpendiculaires ; BF, le côté de l'hexagone régulier inscrit à cette circonférence. Du point F, comme centre, avec un rayon égal au côté BC du carré inscrit, décrivons une circonférence qui rencontre le diamètre AB en deux points I et I', l'un intérieur, l'autre extérieur à la première circonférence. Les distances OI, OI', CI, CI' sont respectivement égales au côté du décagone régulier, au double de l'apothème du pentagone régulier, au côté de ce pentagone, et au double de l'apothème du décagone [1]. On déduit, de ce théorème, une construction nouvelle et très simple de ces deux polygones.

Corollaire. Le triangle ICI' étant rectangle, le carré de la somme du côté du décagone et du double de l'apothème du pentagone est égal à la somme des carrés du côté du pentagone et du double de l'apothème du décagone.

2. *Calcul du côté d'un polygone régulier quelconque.* Considérons un polygone régulier, ayant c pour côté, inscrit à un cercle dont le rayon est r. Soient :

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots\ (x_n, y_n)$$

les coordonnées rectangulaires des sommets, l'origine étant au centre du cercle, et l'axe des abcisses passant par l'un des sommets, de sorte que l'on a, par exemple, $x_1 = r$, $y_1 = 0$. On peut déterminer c, en éliminant les autres inconnues entre les équations suivantes :

---

[1] On peut remarquer, avec Rouché et Comberousse (*Traité de géom. élém.*, première édit. p. 268), que J, milieu de OB, est à égale distance de I, C et I'.

$$x_1 = r,\ y_1 = 0, \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c^2,$$
$$x_2^2 + y_2^2 = r^2, \qquad (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = c^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n^2 + y_n^2 = r^2, \qquad (x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 = c^2.$$

Ces équations, en nombre $(2n + 1)$, expriment que chaque sommet est à une distance r du centre, et à une distance c du sommet voisin.

Il est facile de voir que l'on peut laisser de côté un grand nombre de ces équations et arriver, néanmoins, à la valeur de c. Par exemple, si $n = 4n'$, il suffit d'exprimer les conditions précédentes pour n' côtés ; si $n = 2n'$, n' étant impair, il suffit d'en considérer $n' + 1$. En outre, dans plusieurs cas, on simplifie les calculs, en employant comme inconnue auxiliaire, la corde qui soutend un arc double de celui que soutend le côté c.

L'auteur du travail que nous analysons applique la méthode précédente au calcul du côté de chacun des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 côtés. Il trouve, en particulier, que le côté de l'heptagone est à peu près la moitié de celui du triangle équilatéral. Il arrive aussi à une construction nouvelle du côté du pentagone. Les éliminations auxquelles on est conduit par cette méthode peuvent fournir de bons exercices de calcul algébrique.

3. L'auteur remarque, à propos de l'heptagone et de l'ennéagone, qu'au point de vue graphique, le côté du polygone régulier inscrit, de n côtés, est sensiblement égal à la moyenne arithmétique entre les côtés des polygones réguliers de $(n+1)$ et de $(n-1)$ côtés. L'approximation est d'autant plus grande que n est plus grand (Résumé de l'écrit intitulé : *Mémoire sur le calcul et la construction des polygones réguliers,* par E. FERRON, ingénieur, professeur à l'Athénée de Luxembourg. Extrait des publications de l'Institut R. G-D., section des sciences naturelles. Luxembourg, V. Buck, 1874. 23 p. in-8° et une planche.

(P. M)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LA NOUVELLE CORRESPONDANCE.

Question 2.

(N. C. M., p. 31.)

Éliminer a *et* b *entre les équations*

$$x = m \sin a \cos a \cos b,\ \ y = m \sin b \cos b \cos a,$$
$$a + b = \theta;$$

θ *étant l'angle des axes. Discuter l'équation résultante.*

M. Van den Broeck donne le résultat de l'élimination :

$$\frac{(x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta)^3}{(x + y \cos\theta)^2\ (y + x \cos \theta)^2} = m^2 \sin^2 \theta; \quad (1)$$

puis il discute la courbe représentée par cette équation (1), après l'avoir rapportée à ses *axes principaux :* Cette courbe est une sorte de *quadrifolium.* Enfin, l'auteur de la note que nous analysons remplace l'équation (1) par celle-ci :

$$u = m \sin \theta \cos (\alpha + \omega) \cos (\alpha - \omega), \ (^1) \qquad (2)$$

dont la discussion est extrêmement simple.

M. Van den Broeck fait cette remarque intéressante : *l'équation* (1) *représente le lieu du pied* P *de la perpendiculaire abaissée, de l'origine, sur une droite* AB*, de longueur invariable, dont les extrémités glissent sur les droites fixes* Ox, Oy.

L'*enveloppe* de AB est une courbe remarquable (²), dont on obtient un point M en menant AC perpendiculaire à Ox, BC perpendiculaire à Oy, puis CM perpendiculaire à AB. Conséquemment, la courbe discutée par M. Van den Broeck est la *podaire* de cette enveloppe. D'après un théorème connu, très facile à démontrer, la normale en P, à cette podaire, passe au milieu I du *rayon vecteur* ON, etc. (E. C.)

(¹) Pour former l'équation (2) (ou une équation équivalente), il suffit de faire usage des formules :

$$x^2 + y^2 + 2xy = u^2,$$
$$x + y \cos \theta = u \cos \omega,\ \ y + u \sin \theta = u \cos (\theta - \omega).$$

(²) Quand l'angle θ est droit, cette courbe est *l'épicycloïde* représentée par $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. (*Cours d'Analyse*, p. 468.)

Question 13.

(N. C. M., p. 65.)

Le nombre (2a) (2b) (2c) abc *est divisible par* 23 et 29. (E. Hain.)

En effet, $(2a)\ (2b)\ (2c)\ abc = (2a)\ (2b)\ (2c)\ 000 + abc = abc \times 2000 + abc = abc.\ 2001$. Or 2001 est divisible par 23 et 29 ; donc, etc.

Médulfus, prof. à Carlsbourg.

Note. Solution analogue par M. O. Charlier.

—

Question 14.

(N. C. M., p. 66.)

Déterminer x *et* y *de manière que le nombre* 1234 xy *soit divisible par* 8 *et par* 9. (E. Hain.)

Pour que le nombre soit divisible par 9, on doit avoir $x + y = 8$ ou $x + y = 17$; pour qu'il soit divisible par 8, il faut que $10x + y$ ou $2x + y$ soit un multiple de 8. On trouve immédiatement $x=0$, $y = 8$, ou $x = 8$, $y = 0$. (Extrait de la solution envoyée par M. Médulfus, prof. à Carlsbourg.)

Note. Solution analogue par M. O. Charlier.

—

Question 15.

(N. C. M., p. 66.)

On joint les sommets A, B, C *d'un triangle aux points* A_1 et A_2, B_1 *et* B_2, C_1 et C_2 *qui divisent en trois parties égales les côtés opposés. Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent en trois points* A', B', C' ; *les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *en trois autres points* A'', B'' *et* C''. *Démontrer que chacun des triangles* $A'B'C'$, $A''B''C''$ est le $\frac{1}{7}$ *du triangle* ABC. (E. Hain.)

Il suffit de démontrer la proposition pour le triangle $A'B'C'$.

Par le point C, menons une parallèle à AA_1, qui rencontre BB_1 en D. Nous aurons :

$$CD = 3A'A_1 = \frac{1}{2} AA' ;$$

d'où

$$A_1A' = 6A'A .$$

On déduit immédiatement de là, que

$$AA'B = \frac{6}{7} AA_1B = \frac{6}{21} ABC.$$

On aurait de même :

$$BB'C = \frac{6}{21} ABC,$$
$$CC'A = \frac{6}{21} ABC.$$

En additionnant ces trois égalités membres à membres et remarquant que la somme des trois premiers membres est

$$ABC - A'B'C',$$

on en tire : $$ABC - A'B'C' = \frac{18}{21} ABC;$$

d'où $$A'B'C' = \frac{1}{7} ABC.$$

En général, si n est le nombre de divisions de chaque côté, on aura : $\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}$. Il serait tout aussi facile de trouver l'aire de $A'B'C'$, si A_1, B_1, C_1 divisaient les côtés de ABC, dans un rapport quelconque.

J. Derousseau, élève de première année à l'école normale des sciences.

Note. Autres solutions par MM. O. Charlier, Médulfus.

Question 16.

(N. C. M. p. 66.)

Soient menées dans un triangle ABC, *par les sommets et le centre de gravité* S, *les droites* AS, BS, CS *rencontrant les côtés opposés en* a, b, c. *Formons, avec les droites* Aa, Bb, Cc, *comme côtés, un triangle* MNP. *Les rayons* R, r, r′, r″, r‴, *des cercles circonscrits aux triangles* ABC, NMP, BCS, CAS, ABS *satisfont à la relation*

$$4Rr^2 = 3r'r''r'''.$$ (E. Hain.)

Soient m', m'', m''' les médianes Aa, Bb, Cc ; en appliquant la formule $R = \frac{abc}{4T}$ aux différents triangles et en observant que

$$MNP = \frac{3}{4} ABC = \frac{3}{4} T, \; BCS = CAS = ABS = \frac{1}{3} T,$$

on a :

$$r = \frac{m'm''m'''}{3T}, \; r' = \frac{a.\frac{2}{3}m''.\frac{2}{3}m'''}{4\frac{T}{3}} = \frac{am''m'''}{3T},$$

$$r'' = \frac{bm'''m'}{3T}, \; r''' = \frac{cm'm''}{3T}.$$

Donc :

$$r'r''r''' = \frac{abcm'^2m''^2m'''^2}{27T^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{abc}{4T} \cdot \left(\frac{m'm''m'''}{3T}\right) = \tfrac{4}{3} Rr^2;$$

ou

$$4Rr^2 = 3r'r''r'''.$$

O. Charlier, professeur à l'athénée de Namur.

Question 17.

(N. C. M., p. 66.)

Soient P, Q, R, *les pieds des perpendiculaires abaissées, du centre de gravité d'un triangle* ABC, *sur les côtés de celui-ci. L'aire du triangle* PQR *est égale à*

$$\frac{4}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right) T^3;$$

T *étant l'aire de* ABC, *et* a, b, c, *les longueurs des trois côtés.*

(E. Hain.)

Du centre de gravité O, je mène les perpendiculaires OP, OQ, OR respectivement sur les côtés AB, AC, BC ou c, b, a ; OP, OQ, OR sont respectivement le tiers des hauteurs correspondantes aux mêmes côtés ; je représente ces hauteurs par h, h', h''. Le triangle PQR se compose des trois triangles POQ, POR, QOR. On sait que deux triangles, ayant un angle supplémentaire, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle ; donc,

$$\frac{ABC}{POQ} = \frac{b.c}{\frac{1}{3}h'.\frac{1}{3}h''} = \frac{b^2c^2}{\frac{1}{9}bh'.ch''} = \frac{b^2c^2}{\frac{4}{9}T^2}, \; POQ = \frac{4}{9}\frac{T^3}{b^2c^2}.$$

On trouverait de même :

$$POR = \frac{4}{9}\frac{T^3}{a^2c^2}, \; QOR = \frac{4}{9}\frac{T^3}{a^2b^2}.$$

Ainsi,

$$PQR = \frac{4}{9}T^3\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) = \frac{4}{9}T^3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right).$$

Médulfus, prof., à Carlsbourg.

Note. Autre solution par M. O. Charlier.

Question 23.

(N. C. M., p. 67.)

On donne, dans un tétraèdre deux couples d'arêtes opposées ; déterminer les deux dernières arêtes, de manière que le tétraèdre ait un volume maximum. [1]

1. Je dis d'abord que si chacune des arêtes données est plus petite que la somme des trois autres, il existe toujours un tétraèdre ayant les quatre arêtes données et les deux dièdres BD, AC droits.

En donnant à l'arête BD une longueur arbitraire, on pourra construire les deux triangles BCD, BAD et ensuite les assembler à angle droit.

Supposons que le dièdre BD restant droit, on fasse varier la longueur de l'arête BD. La plus petite valeur qu'on puisse lui donner est la plus grande des deux différences qui existent entre BC, CD d'une part et AB, AD de l'autre ; la plus grande valeur qu'on puisse lui donner est la plus petite des deux sommes AB + AD, BC + CD. Lorsque cette arête varie depuis son minimum jusqu'à son maximum, l'angle dièdre AC part de zéro et arrive à 180° en variant d'une manière continue ; donc il a passé par la valeur intermédiaire 90°, et alors on a le tétraèdre annoncé.

2. Je dis maintenant que le tétraèdre n'est pas maximum si l'un des dièdres BD, AC n'est pas droit. Supposons que le dièdre BD ne soit pas droit. Soit AP la hauteur du tétraèdre, soit PH perpendiculaire à BD ; alors AH est perpendiculaire à BD. Si l'on fait tourner la face ABD autour de BD pour rendre le dièdre BD droit, la base BCD ne change pas ; la hauteur AP est remplacée par AH, qui est plus grande ; donc le volume a augmenté, et n'était pas maximum.

On conçoit d'ailleurs qu'il existe un tétraèdre maximum parmi tous ceux qui ont les quatre arêtes données. Or le tétraèdre n'est pas maximum si chacun des dièdres AC, BD n'est pas droit. Donc le maximum a lieu lorsque les deux dièdres sont droits, condition qui peut toujours être remplie.

---

[1] Nous reproduisons, en partie, la solution donnée par l'élève PAULET, du lycée de Marseille, qui a remporté le 1er prix, en concurrence avec Paris et les départements.

QUESTIONS PROPOSÉES.

28. Construire un triangle ABC, connaissant les angles et la relation

$$a.\,\mathrm{BC} + b.\,\mathrm{CA} + c.\,\mathrm{AB} = k^2 :$$

a, b, c, k sont des longueurs données. (J. N)

29. Construire un triangle ABC, connaissant un angle, le côté BC et l'une des relations

$$c.\,\mathrm{AB} \pm b.\,\mathrm{CA}. = k^2.\ (^1)$$ (J. N)

30. Trouver un point A tel, que les tangentes AB, AC, menées de ce point à deux circonférences données, fassent entre elles un angle donné et vérifient l'une des relations

$$c.\,\mathrm{AB} \pm b.\,\mathrm{CA} = k^2.$$ (J. N)

31. Couper un triangle ABC par une transversale DE, parallèle à une direction donnée, et satisfaisant à la relation

$$m.\,\mathrm{DE} + p.\,\mathrm{BD} + q.\,\mathrm{CE} = k^2.$$ (J. N)

32. Trouver, sur les côtés AB, AC d'un triangle donné ABC, deux points D, E, de manière que l'on ait

$$\frac{\mathrm{BD}}{m} = \frac{\mathrm{CE}}{p} = \frac{\mathrm{DE}}{q}.$$ (J. N)

33. Étant donnés un angle et deux points A, B, mener par A une sécante telle, que les points où elle rencontre les côtés de l'angle, et le point B, soient les sommets d'un triangle équivalent à un carré donné. (J. N.)

34. Soient A, B, C, D, quatre points d'une même circonférence. Démontrer que les centres des cercles inscrits aux triangles ABC, ACD, BCD, ABD sont les sommets d'un rectangle. (2)

35. Soient : R, R′ les rayons de deux circonférences O, O′ ; AB, la corde commune ; α, l'angle OAO′ ; D, la distance du

(1) A résoudre par le troisième livre de Géométrie. Pour une solution de ce problème, par les équipollences, voir les *Nouvelles Annales* (1873, p. 245).

(2) Ce théorème assez intéressant, que nous extrayons des *Archives de Grunert* (1842, p. 328), paraît avoir été peu remarqué. (J. N)

point A à l'une des tangentes communes. Démontrer la formule

$$D = \frac{2RR' \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{R+R' \pm 2\sqrt{RR'} \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

(J. N)

36. Démontrer que

$$e^{-\frac{d^2}{da^2}} \left[\frac{a\,(a^2+b^2-4)}{(a^2+b^2)^2}\right] = 0. \ (^1)$$

(J. W. L. Glaisher)

37. Le nombre d'années nécessaire pour qu'une somme d'argent, placée à intérêt composé, à t p % par an, soit doublée, est égal, à 3 jours près, au quotient de 69,315 par t, augmenté de 0,346, t n'étant pas supérieur à 12. (F. Thoman)

BIBLIOGRAPHIE.

—

IV.

Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, par R. Argand. Deuxième édition, précédée d'une préface par M. J. Houel et suivie d'un appendice contenant des extraits des *Annales de Gergonne*, relatifs à la question des imaginaires. Paris, Gauthier-Villars, 1874. XIX-126 p. petit in-8°. — Mons. Hector Manceaux. — Prix : 5 fr.

Le premier qui ait publié un écrit sur la théorie géométrique des

---

(1) On a, par définition

$$e^{-\frac{d^2}{da^2}} F = \left(1 - \frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{1.2}\frac{d^4}{da^4} - \frac{1}{1.2.3}\frac{d^6}{da^6} + \text{etc.}\right) F$$

$$= F - \frac{d^2F}{da^2} + \frac{1}{1.2}\frac{d^4F}{da^4} - \frac{1}{1.2.3}\frac{d^6F}{da^6} + \text{etc.}$$

maginaires est un savant génevois, Robert Argand [1]. Sa brochure, dont nous avons transcrit le titre en tête de cet article, parut en 1806, mais ne fut pas mise dans le commerce. Elle ne parvint à la connaissance du public qu'en 1813, à la suite d'une Note de Français, dans les *Annales de Gergonne*. Argand écrivit, à cette occasion, pour le même recueil, un résumé substantiel de sa brochure. Depuis on n'a rien ajouté à la théorie géométrique des imaginaires, dont Argand doit être considéré comme le vrai créateur. Gauss vulgarisa cette théorie en Allemagne, en l'employant dans ses recherches sur les nombres; Cauchy, en France, en en faisant l'une des bases de la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire; Hamilton, en Angleterre, en créant la théorie des quaternions, dont les quantités géométriques d'Argand ne sont qu'un cas particulier; enfin Bellavitis, en Italie, en déduisit sa méthode des équipollences.

M. Hoüel a eu l'heureuse idée de rééditer la brochure d'Argand, parce qu'elle fait vraiment époque dans la science. Il y a joint les divers articles ou notes de Français, Servois, Argand, Gergonne sur la question des imaginaires, qui ont paru dans les *Annales de Mathématiques*.

La brochure d'Argand contient les règles de l'addition et de la multiplication géométrique des imaginaires; les applications les plus remarquables à la théorie des fonctions circulaires, des exponentielles et des logarithmes; et, enfin la démonstration du théorème que toute équation a une racine, que personne n'était parvenu à prouver jusqu'alors, Gauss excepté (p. 1-60). Le premier article de Français, dans les *Annales de Gergonne*, contient, sous une forme un peu différente, la théorie d'Argand. Français avait eu indirectement connaissance de la brochure d'Argand, par l'intermédiaire de Legendre (p. 63-74). Dans l'article suivant, M. Argand résume sa brochure et essaie d'étendre sa théorie à l'espace à trois dimensions, mais sans y réussir (p. 76-96). Français fait quelques objections à la manière de voir d'Argand sur ce sujet (p. 96-101); Servois combat, et la théorie des imaginaires d'Argand dans le plan, et son extension à l'espace (p. 101-109). Gergonne et Français défendent les vues d'Argand, et ce dernier, lui-même, répond à la principale objection de Servois, en démontrant, plus rigoureusement que dans ses autres écrits, le théorème : toute équation a une racine (p. 109-123).

Dans sa brochure et ses divers articles, Argand emploie précisément la notation dont nous nous sommes servi (p. 16), pour désigner

---

[1] Un autre savant, Henri-Dominique Truel, avait trouvé, dès 1786, la vraie nature des quantités imaginaires. Mais ses manuscrits n'ont jamais été publiés. Vers 1810, ils furent communiqués à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre (CAUCHY, *Exercices d'analyse* etc., t. 4, p. 157).

une longueur AB, en grandeur et en direction, c'est-à-dire, — AB [1].

L'exécution typographique de l'ouvrage est digne d'éloges.

P. M.

V.

Les numéros de janvier à juin 1874 du *Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, publié à Rome par M. le Prince Boncompagni, contiennent, outre la liste des publications mathématiques récentes, les écrits suivants :

1° Une notice sur la vie et les travaux de Rankine, par M. Quercia (p. 1-61).

2° Une notice sur quelques quadrateurs du cercle, dans les Pays-Bas, par M. Bierens de Haan, avec une note de M. Catalan, sur L. Van Ceulen (p. 93-144).

3° Un compte-rendu de M. Th.-H. Martin, du commentaire de Proclus sur le premier livre d'Euclide, édité par M. Friedlein, avec une savante notice bibliographique sur cet ouvrage, par M. Boncompagni (p. 145-165).

4° L'histoire de la théorie des fractions continues avant Euler, par S. Gunther (p. 213-254), avec une notice historique de Woepke, sur une méthode employée par Pacioli pour extraire les racines carrées (p. 255-262).

5° Une lettre où M. Th.-H. Martin démontre que Damasius est probablement l'auteur du livre XV des *Éléments* d'Euclide (p. 263-266).

6° Enfin la traduction d'un manuscrit arabe, sur des problèmes du premier degré, par Aristide Marre (p. 267-277).

Cet auteur a également publié récemment, à Rome, la traduction annotée d'un chapitre très-curieux de l'Histoire de l'Archipel indien, de Crawfurd, sous le titre : *De l'Arithmétique dans l'Archipel indien*.

P. M.

---

[1] M. A. Transon nous fait remarquer, à propos de notre article *sur un nouveau mode de génération des coniques*, que nous avons, à tort, appelé géométrie directive, la méthode employée dans cet article. C'est *algèbre directive* qu'il faut dire.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

d'après Baltzer et Salmon.

—

CHAPITRE I. — DÉFINITIONS.

I.

Des permutations d'éléments à un seul indice.

1. *Dérangements.* De toutes les permutations d'un certain nombre d'éléments

$$(1, 2, 3, 4),\quad (a_1, a_2, a_3, a_4)\ \text{ou}\ (a, b, c, d),$$

il y en a une seule, savoir :

$$1234,\quad a_1a_2a_3a_4,\quad abcd,$$

où les éléments soient dans l'ordre naturel. Dans toutes les autres, par exemple, dans

$$4231,\quad a_4a_2a_3a_1,\quad dbca, \qquad (1)$$

les éléments sont dans un ordre différent.

On appelle *dérangement* ou *inversion*, dans une permutation, la combinaison d'un élément avec un élément qui le suit dans cette permutation, mais qui le précède, quand les éléments sont rangés dans l'ordre naturel ou alphabétique. Ainsi les permutations (1) contiennent cinq dérangements, savoir :

$$[42,43,41,21,31],\quad [a_4a_2,\ a_4a_3,\ a_4a_1,\ a_2a_1,\ a_3a_1],\ [db,dc,da,ba,ca].$$

Exercices. 1. Déduire une permutation quelconque, 52143, de la permutation 12345, où les éléments sont rangés dans l'ordre naturel, par un nombre d'échanges d'éléments égal à celui des dérangements de cette permutation, et de deux manières différentes.

2. On peut déduire une permutation de n éléments, d'une autre quelconque, par $(n-1)$ échanges d'éléments au plus.

2. *Permutations paires ou impaires.* Cramer a divisé les permutations en deux classes : les permutations *paires*, qui contiennent un nombre pair de dérangements, comme 1234, 4321;

les permutations *impaires*, qui en contiennent un nombre impair, comme 4231, 4123. On peut diviser en deux classes les permutations d'éléments tels que m, 7, u_1, s, en posant

$$m=a_1, \quad 7=a_2, \quad u_1=a_3, \quad s=a_4.$$

La différence entre le nombre de dérangements de deux permutations est paire ou impaire, selon qu'elles sont ou ne sont pas de même classe.

3. Théorème de Bezout. *Une permutation change de classe si l'on échange deux éléments (ou deux indices).*

1er *Cas. Échange de deux éléments adjacents* a_i, a_k, $i < k$. Désignons l'ensemble des éléments qui précèdent a_i et a_k par M; l'ensemble de ceux qui suivent, par N. La permutation

$$\mathrm{M}a_k a_i \mathrm{N}$$

contient un dérangement de plus que

$$\mathrm{M}a_i a_k \mathrm{N},$$

savoir $a_k a_i$, puisque $i < k$. Donc ces permutations sont de classes différentes.

2e *Cas. Échange de deux éléments quelconques.* Désignons par I l'ensemble des éléments, en nombre m, compris entre a_i et a_k. On déduit, de

$$\mathrm{M}a_i \mathrm{I} a_k \mathrm{N}, \tag{1}$$

la permutation

$$\mathrm{MI}a_i a_k \mathrm{N}, \tag{2}$$

par m échanges d'éléments adjacents, en faisant passer successivement a_i au delà des m éléments de I. On tire de (2)

$$\mathrm{MI}a_k a_i \mathrm{N}, \tag{3}$$

par *un* échange d'éléments adjacents, savoir a_i et a_k. Enfin, on passe de cette permutation (3) à

$$\mathrm{M}a_k \mathrm{I} a_i \mathrm{N}, \tag{4}$$

en faisant reculer a_k en deça des m éléments de I, au moyen de m échanges d'éléments adjacents. On passe donc de la permu-

tation (1) à la permutation (4), qui n'en diffère que par l'échange des éléments a_i, a_k, au moyen de $(2m+1)$ échanges d'éléments adjacents ; ce qui équivaut à $(2m+1)$ changements de classe, ou à un seul changement de classe. Le théorème est donc démontré. On remarquera que la différence entre le nombre des dérangements des permutations (1) et (4) est impair (nº 2).

Exemple. Les permutations marquées I et II, dans les tableaux suivants, sont de classes différentes :

I	1234,	*ab*c**d**	*m*7*u_1***s**
II	4231,	*ab***d***c*	*m*7**s***u_1*
I	4321,	*a***d***bc*	*m***s**7*u_1*
II	4123,	**d***abc*	**s***m*7*u_1*

Corollaire. A chaque permutation paire correspond une permutation impaire, obtenue par échange de deux éléments; et inversement. Le nombre des permutations des deux classes est donc le même.

Exercice. Démontrer directement le théorème de Bezout, dans le second cas. (Baltzer, I, nº 2, nº 4.)

4. *Permutations circulaires.* « Le résultat de l'échange des éléments d'une permutation, est appelé *permutation circulaire* de la première, lorsque chaque élément est remplacé par le suivant, et le dernier par le premier » (Baltzer). Ainsi 43125 est une permutation circulaire de 54312.

Pour effectuer une permutation circulaire de n éléments, il suffit de mettre le premier élément après les $(n-1)$ autres, ou d'effectuer $(n-1)$ échanges d'éléments adjacents. La permutation primitive, et celle qu'on en déduit par une permutation circulaire sont donc, ou ne sont pas de même classe, selon que $(n-1)$ est pair ou impair. Ainsi 54312 et 43125 sont de même classe; car $n-1=4$.

Exercices. 1. D'une permutation donnée, de n éléments (725438169) on peut déduire une autre quelconque (293874156) par des permutations circulaires effectuées sur p groupes d'éléments (726953,48,1) (Baltzer, I, 5).

2. La permutation primitive et la permutation dérivée sont, ou ne sont pas de même classe, selon que $n-p$ est pair ou impair (*id.*).

II.

Des permutations distinctes d'éléments à deux indices.

5. *Permutations distinctes de* n^2 *éléments, ou permutations d'éléments à deux indices.* On appelle ainsi tous les produits différents que l'on peut former en prenant un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne du tableau de ces n^2 éléments, rangés en carré, de la manière suivante :

	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
.	.	.	.	.
n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

	1	2	3	...
1	a_1	b_1	c_1	...
2	a_2	b_2	c_2	...
3	a_3	b_3	c_3	...
	.	.	.	.

	1	2	3	...
1	a	b	c	...
2	h	k	l	...
3	p	q	r	...
	.	.	.	.

La permutation *principale* est le produit

$$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}, \quad a_1\, b_2\, c_3 \ldots, \quad akr \ldots$$

des éléments qui sont sur la diagonale du carré, allant du premier au dernier élément.

Dans le premier tableau, chaque ligne est caractérisée par un des premiers indices 1, 2, ... n ; chaque colonne par un des seconds. Dans le second, des lettres remplacent les seconds indices. On ne peut guère étudier les permutations d'éléments représentés par des lettres distinctes, comme dans le troisième tableau, qu'en les remplaçant, mentalement ou réellement, par des éléments analogues à ceux des deux autres tableaux.

6. *Formation des permutations de n^2 éléments à deux indices. Première Méthode.* Supposons écrites toutes les permutations des n^2 éléments du tableau 1 (n° 5). Chacune de ces permutations est le produit de n facteurs, ayant pour premiers indices 1, 2, 3, ... n, parce que l'on a pris un facteur dans chaque ligne, et pour seconds indices, aussi 1, 2, 3, ... n, parce que l'on a pris un facteur dans chaque colonne. Arrangeons les n facteurs de chaque permutation dans un ordre tel que les premiers indices soient dans l'ordre naturel. Les seconds indices seront aussi dans l'ordre naturel pour la permutation princi-

pale $a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$, mais dans un ordre différent pour les autres permutations. Par suite, pour avoir toutes les permutations différentes, il suffit de permuter, dans la permutation principale, tous les seconds indices, en laissant les premiers dans l'ordre naturel. En effet, on aura pris, de cette manière, pour former les diverses permutations ou produits distincts, un facteur dans chaque ligne et un dans chaque colonne, et de toutes les manières possibles. Pour neuf éléments, cette règle donne les six permutations :

$$p_1 = a_{11}\,a_{22}\,a_{33},\quad p_2 = a_{11}\,a_{23}\,a_{32},\quad p_3 = a_{13}\,a_{21}\,a_{32},$$
$$p_4 = a_{12}\,a_{21}\,a_{33},\quad p_5 = a_{12}\,a_{23}\,a_{31},\quad p_6 = a_{13}\,a_{22}\,a_{31};$$

ou, si les seconds indices sont remplacés par des lettres :

$$p_1 = a_1\,b_2\,c_3,\quad p_2 = a_1\,c_2\,b_3,\quad p_3 = c_1\,a_2\,b_3,$$
$$p_4 = b_1\,a_2\,c_3,\quad p_5 = b_1\,c_2\,a_3,\quad p_6 = c_1\,b_2\,a_3.$$

Seconde Méthode. On peut aussi trouver toutes les permutations de n^2 éléments, en permutant les premiers indices de la permutation principale, de toutes les manières possibles, et laissant les seconds invariables. Ainsi, 9 éléments donnent les six permutations p dans l'ordre suivant, si les permutations des indices sont écrites dans le même ordre que plus haut :

$$p_1, p_2, p_5, p_4, p_3, p_6.$$

Remarque. Voici une règle plus générale, facile à démontrer: Permutez, dans une permutation quelconque, n des indices 1, 2, 3, ... n, des n facteurs, de toutes les manières possibles, et laissez les autres fixes.

Exercice. Former les permutations de seize éléments $a_1, b_1, c_1, \ldots d_4$.

(A continuer.)

P. Mansion.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

d'après Baltzer et Salmon.

(Suite. Voir p. 100, 3e livraison.)

—

7. Théorème. *Les permutations de* n^2 *éléments restent les mêmes, si l'on échange entre elles deux lignes, ou deux colonnes, ou si l'on remplace les colonnes par les lignes et les lignes par les colonnes.* Appelons *rangées* les lignes et les colonnes. Les éléments qui sont dans une même rangée du tableau primitif des éléments, sont aussi dans une même rangée du nouveau tableau, obtenu par interversion de lignes ou de colonnes, etc. ; les éléments qui ne sont pas dans une même rangée du tableau primitif ne sont pas non plus dans une même rangée du nouveau tableau. Toute permutation obtenue en prenant un facteur dans chaque ligne et chaque colonne du tableau primitif, s'obtiendra également en prenant ces facteurs dans le second tableau ; car, d'après la remarque précédente, deux d'entre eux ne seront pas dans une même rangée.

8. Théorème de Bezout. *Permutations paires ou impaires.* Considérons les permutations

$$A = Ma_{ir}Ia_{ks}N, \quad B = Ma_{is}Ia_{kr}N, \quad C = Ma_{ks}Ia_{ir}N.$$

A cause de l'échange des seconds indices r et s, la différence du nombre des dérangements des seconds indices, dans A et B, est impaire (nº 3) ; à cause de l'échange des premiers indices i et k, la différence du nombre des dérangements des premiers indices, dans B et C, est impaire. Donc la différence entre le nombre total des dérangements des permutations équivalentes, A et C, est paire.

Appelons *permutations paires* celles qui contiennent un nombre pair de dérangements, soit des premiers, soit des seconds indices ; *permutations impaires*, celles qui en contiennent un nombre impair. Le théorème précédent pourra s'énoncer ainsi : *Une permutation reste de même classe si l'on y change de place deux facteurs* ([1]) Il est clair qu'une permutation ne change pas de valeur par ce changement de l'ordre des facteurs.

Exemple : Les permutations équivalentes :

$$a_{13}\,a_{21}\,a_{32} = a_{21}\,a_{32}\,a_{13} = a_{32}\,a_{13}\,a_{21}$$

contiennent respectivement 2, 2, 4 dérangements, savoir :

$$(31, 32)\ (21, 31)\ (31, 32\ ;\ 21, 31).$$

Les permutations suivantes en contiennent 1, 3, 5 :

$$a_{12}\,a_{21}\,a_{33} = a_{21}\,a_{33}\,a_{12} = a_{33}\,a_{21}\,a_{12}.$$

Exercices. 1. Démontrer directement le théorème de Bezout pour les permutations d'éléments à deux indices.

2. Déterminer le nombre de dérangements des permutations

$$b_1a_3d_2c_4 = c_4a_3b_1d_2 = c_4d_2a_3b_1,$$
$$b_1d_3a_4c_2 = b_1a_4c_2d_3 = d_3c_2a_4b_1.$$

3. Les produits des éléments des diagonales d'un carré de n^2 éléments sont de classe différente, sauf si $(n-1)$ ou $(n-2)$ est divisible par 4.

III.

Des déterminants.

9. *Définition et notation.* Le déterminant de n^2 éléments (voir nº 5, tableaux 1, 2, 3) est la somme algébrique des permutations de ces éléments. On donne le signe + au *terme principal* T formé par les éléments de la diagonale du carré des éléments, qui va du premier au dernier, et à toutes les permutations de même classe ; le signe — aux permutations de classe différente.

([1]) Un théorème analogue existe pour les permutations d'éléments à un nombre quelconque d'indices. La marche suivie dans notre § II, conduit naturellement à la théorie des déterminants cubiques ou à un nombre quelconque de dimensions.

On représente le déterminant par le tableau des éléments, entre deux barres verticales :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ h & k & l \\ p & q & r \end{vmatrix};$$

ou par les notations suivantes, quand elles sont suffisamment expressives :

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} = (a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}),$$
$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = (a_1 b_2 c_3), \quad \Sigma \pm akr = (akr).$$

Pour former un déterminant, on déduit tous les termes du terme principal en y permutant, soit les premiers, soit les seconds indices, et laissant les autres invariables (n° 6), puis donnant à chaque terme le signe convenable. Exemple :

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$$

Remarque. Pour former un déterminant de neuf éléments, on met, mentalement, ou en réalité, les deux premières colonnes à côté de la troisième, ou les deux premières lignes après la dernière ; on écrit les six produits obtenus en multipliant les trois éléments situés sur des lignes parallèles aux diagonales du tableau primitif ; on donne le signe + aux produits des éléments situés sur une parallèle à la diagonale du terme principal, le signe — aux autres.

Exercices. 1. Trouver $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$.

2. Un déterminant ne change pas, si l'on change le signe de tous les éléments où la somme des indices est impaire (Janni).

10. Lemme. Permutons, dans un déterminant R, les lignes entre elles et les colonnes entre elles, d'une manière quelconque. Changeons encore, si l'on veut, les lignes en colonnes et les colonnes en lignes. *Le déterminant R', ainsi obtenu, sera égal à + R ou à — R, selon que les termes principaux T et T', de R et de R', sont ou ne sont pas de même classe.* En effet : 1° Les deux déterminants contiennent les mêmes permutations (n° 7). 2° Si T et T' sont de même classe, les permutations de même classe

auront le signe + dans les deux déterminants ; les autres, le signe —; donc R=R′. 3° Si T et T′ sont de classes contraires, les permutations de même classe que T (de classe contraire à T′), auront le signe + dans R, le signe — dans R′ ; les permutations de classe contraire à T (de même classe que T′), auront le signe — dans R, le signe + dans R′ ; donc R = — R′.

Exemple. $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} = \Sigma \pm a_{33}a_{22}a_{11} = -\Sigma \pm a_{13}a_{22}a_{31}$.

Exercice. Démontrer qu'en général $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \Sigma \pm a_{nn}\dots a_{22}a_{11}$ $= (-1)^r \; \Sigma \pm a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$; $2r = (n-1)(n-2$.

11. Propriété I. *Un déterminant ne change pas quand on y change les colonnes en lignes et les lignes en colonnes.* Ainsi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

car les permutations des deux déterminants sont les mêmes (n° 10), et les termes principaux sont identiques.

12. Propriété II. *Un déterminant change de signe, quand on y échange de place deux lignes ou deux colonnes.* En effet, si l'on échange la colonne i avec la colonne k,

$$\begin{matrix} a_{ii} \dots a_{ki} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{ki} \dots a_{kk} \end{matrix}$$

est remplacé, dans le tableau des éléments, par

$$\begin{matrix} a_{ik} \dots a_{ii} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{kk} \dots a_{ki}\,; \end{matrix}$$

les termes principaux des deux déterminants correspondants R et R′, sont donc de la forme

$$Ma_{ii}Ia_{kk}N, \quad Ma_{ik}Ia_{ki}N.$$

Ils sont de classes contraires, à cause de l'échange des seconds indices i et k ; donc, d'après le n° 10, R = — R′.

Corollaire. Si l'on place, après toutes les autres, la première ligne ou la première colonne, c'est-à-dire, si l'on effectue une permutation circulaire des lignes ou des colonnes, cela équivaut à $(n-1)$ échanges de lignes ou de colonnes, ou à une multiplication du déterminant par $(-1)^{n-1}$. Exemple : $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = (-1)^3 \Sigma \pm b_1 c_2 d_3 a_4$.

13. Propriété III. *Si les éléments de deux lignes ou de deux colonnes parallèles d'un déterminant* R *sont égaux, le déterminant est nul.* 1° R devient — R par échange de ces deux lignes ou de ces deux colonnes (n° 12). 2° R ne change pas par cet échange, car ces lignes ou ces colonnes sont identiques. Donc $R = -R$, ou $R = 0$. Ainsi, si l'on fait $a_{11} = a_{12}, a_{21} = a_{22}, a_{31} = a_{32}$ dans le déterminant développé au n° 9, il s'annule.

Applications. I. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (b-a)\,(c-a)\,(d-a) \\ (c-b)\,(d-b) \\ (d-c). \end{matrix}$$

En effet, le déterminant et le produit s'annulent pour $a=b$, $a=c$, $a=d$, $b=c$, $b=d$, $c=d$, et contiennent l'un et l'autre, avec le coefficient 1, le terme bc^2d^3. Ce théorème est vrai pour un nombre quelconque de quantités a, b, c, d, ...

II. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz,$$

car il contient le terme xyz et s'annule pour $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Exercices. 1. Démontrer l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

2. Démontrer l'égalité plus générale

$$\begin{vmatrix} a & x & x & . & . \\ x & b & x & . & . \\ x & x & c & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = X\left(1 + \frac{x}{a-x} + \frac{x}{b-x} + \frac{x}{c-x} + \cdots\right),$$

dans laquelle $X = (a-x)(b-x)(c-x) \ldots\ldots$

3. Si (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont les coordonnées rectangulaires de trois points, A, B, C, les équations

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & x-x_3 & y-y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

représentent la droite AB, une parallèle à AB passant par C et le cercle passant par les trois points A, B, C.

14. Propriété IV. *Pour multiplier (ou diviser) un déterminant par* m, *on multiplie (ou on divise) par* m *les éléments d'une ligne ou d'une colonne.* En effet, chaque terme du déterminant est ainsi multiplié (ou divisé) par m, puisqu'il contient un élément de cette ligne ou de cette colonne.

Pour multiplier ou diviser par (—1) un déterminant, il suffit de changer le signe des éléments d'une ligne ou d'une colonne. On peut mettre en facteur, devant le déterminant, un facteur m commun à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne, après division de ces éléments par m.

Corollaire. *Un déterminant est nul si les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont égaux à ceux d'une ligne ou d'une colonne parallèle, multipliés par un facteur.* Car, si l'on fait sortir ce facteur du déterminant, le nouveau déterminant a deux lignes ou deux colonnes identiques.

Exemple. On a successivement :

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = x^2y^2z^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{z}{xy} & \frac{y}{zx} \\ 1 & \frac{z}{xy} & 0 & \frac{x}{yz} \\ 1 & \frac{y}{zx} & \frac{x}{yz} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ xyz & 0 & z^2 & y^2 \\ xyz & z^2 & 0 & x^2 \\ xyz & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercices. 1. On appelle *déterminant symétrique gauche* celui où $a_{ik} = - a_{ki}$, $a_{ii} = 0$. Démontrer qu'un pareil déterminant ne change pas quand on le multiplie par $(-1)^n$, même si n est impair ; que, par suite, il est nul dans ce cas de n impair.

2. Démontrer le théorème de Janni (n° 9, Ex. 2), en multipliant certaines lignes et certaines colonnes du déterminant par (—1).

(A continuer.) P. MANSION.

SUR DEUX PROBLÈMES DE SIMON LHUILIER.

1° *Couper un prisme droit, ayant une base donnée* ABC, *de manière que la section* MNP *soit semblable à un triangle donné* A'B'C'.

2° *Construire, sur un triangle donné* ABC, *un prisme oblique dont la section droite* M'N'P' *soit semblable à un triangle donné* A'B'C'.

Une première solution de ces problèmes est due à Simon Lhuilier [1]. La suivante est la généralisation de celle que M. Lionnet a donnée [2], pour le cas où les triangles MNP, M'N'P' sont équilatéraux.

---

[1] Né à Genève en 1750, mort en 1840 ; élève de Louis *Bertrand*, connu par sa théorie des parallèles ; professeur de Charles *Sturm*, auteur du fameux théorème. — La solution de Simon Lhuilier est reproduite dans les « *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire, par E. Catalan* ».

[2] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1869, p. 528 et 555. Nous avons déjà énoncé la plupart des résultats de la présente notice dans la *Revue de l'instruction publique en Belgique*, t. XVII, p. 282.

1. Désignons par a, b, c, a', b', c' les côtés des triangles ABC, A'B'C', et par $a'x$, $b'x$, $c'x$ ceux des triangles MNP, M'N'P'. Les deux problèmes conduisent, respectivement, aux équations

$$\sqrt{a'^2x^2-a^2}+\sqrt{b'^2x^2-b^2}+\sqrt{c'^2x^2-c^2}=0,$$
$$\sqrt{a^2-a'^2x^2}+\sqrt{b^2-b'^2x^2}+\sqrt{c^2-c'^2x^2}=0,$$

qui, rendues rationnelles, reviennent à

$$S'^2x^4-2T^2x^2+S^2=0, \tag{1}$$

où l'on a posé :

$$16\,S^2=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2,$$
$$16\,S'^2=-a'^4-b'^4-c'^4+2a'^2b'^2+2b'^2c'^2+2c'^2a'^2,$$
$$16\,T^2=-a^2a'^2-b^2b'^2-c^2c'^2+a^2b'^2+a'^2b^2+b^2c'^2+b'^2c^2+c^2a'^2+c'^2a^2.$$

On voit que S, S' représentent les aires des triangles donnés. La quantité $16\,T^2$ est une fonction des côtés des deux triangles, dont la composition peut être indiquée par

$$\tfrac{1}{2}\left[a'^2\,\frac{d(16S^2)}{d(a^2)}+b'^2\,\frac{d(16S^2)}{d(b^2)}+c'^2\,\frac{d(16S^2)}{d(c^2)}\right].$$

Les racines de l'équation (1) peuvent être mises sous la forme

$$x_1=\sqrt{\frac{T^2+SS'}{2S'^2}}+\sqrt{\frac{T^2-SS'}{2S'^2}},$$
$$x_2=\sqrt{\frac{T^2+SS'}{2S'^2}}-\sqrt{\frac{T^2-SS'}{2S'^2}}.$$

La plus grande convient au triangle MNP, et l'autre au triangle M'N'P'.

2. Cela posé, voici la construction des triangles MNP, M'N'P'. *Dans le plan du triangle* ABC, *construisons les triangles* A_1BC, AB_1C, ABC_1, A_2BC, AB_2C, ABC_2 *semblables à* A'B'C' ; *les trois premiers étant extérieurs à* ABC *et les autres tournés vers l'intérieur de* ABC ; *les sommets homologues des sept triangles semblables sont désignés par les mêmes lettres. Soient* α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 *les centres des circonférences circonscrites aux triangles* A_1BC, AB_1C, ... *Les côtés du triangle* MNP *seront égaux à*

$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2,\quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2,\quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2,$$

et ceux de M'N'P' *égaux à*

$$\beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2, \quad \gamma_1\alpha_1 - \gamma_2\alpha_2, \quad \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2.$$

En effet, le triangle $\beta_1 A \gamma_1$ donne

$$\overline{\beta_1\gamma_1}^2 = \overline{A\beta_1}^2 + \overline{A\gamma_1}^2 - 2A\beta_1 . A\gamma_1 . \cos(A+A'),$$

ou

$$\overline{\beta_1\gamma_1}^2 . \frac{b'^2c'^2}{R'^2} = b^2c'^2 + b'^2c^2 - 2bb'cc' \cos(A+A')$$

$$= b^2c'^2 + b'^2c^2 - 2bb'cc' \cos A \cos A' + 2bb'cc' \sin A \sin A',$$

R' étant le rayon du cercle circonscrit à A'B'C'.

En ayant égard aux relations

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2, \qquad 2b'c' \cos A' = b'^2 + c'^2 - a'^2,$$

$$bc \sin A = 2S \qquad , \qquad b'c' \sin A' = 2S',$$

$$\frac{b'^2c'^2}{R'^2} = \frac{16S'^2}{a'^2},$$

on trouve

$$\beta_1\gamma_1 = a'\sqrt{\frac{T^2+SS'}{2S'^2}}.$$

De même

$$\beta_2\gamma_2 = a'\sqrt{\frac{T^2-SS'}{2S'^2}};$$

par conséquent

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = a'x_1, \quad \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 = a'x_2. \quad \text{C. q. f. d.}$$

3. Soient θ, θ' les aires des triangles MNP, M'N'P' ; on peut écrire

$$x_1^2 = \frac{\theta}{S'}, \; x_2^2 = \frac{\theta'}{S'}, \; x_1^2 + x_2^2 = \frac{2T^2}{S'}, \; x_1^2 x_2^2 = \frac{S^2}{S'^2};$$

d'où

$$T^2 = \frac{S'(\theta+\theta')}{2}, \qquad S^2 = \theta\theta'.$$

La première de ces formules donne une signification très simple de la fonction T. De la seconde, on conclut que *l'aire du triangle* ABC *est moyenne proportionnelle entre celles des triangles* MNP *et* M'N'P'; par suite, *les plans* MNP *et* M'N'P' *ont la même inclinaison sur le plan* ABC.

4. On a trouvé, ci-dessus, des relations remarquables qui ont lieu entre les éléments de deux triangles quelconques ABC, A′B′C′; savoir :

$$
\begin{aligned}
8\,T^2 &= b^2c'^2+b'^2c^2-2bb'cc' \cos A \cos A' \\
&= c^2a'^2+c'^2a^2-2cc'aa' \cos B \cos B' \\
&= a^2b'^2+a'^2b^2-2aa'bb' \cos C \cos C' \,; \\
8\,(T^2 \pm SS') &= b^2c'^2+b'^2c^2-2bb'cc' \cos (A \pm A') \\
&= c^2a'^2+c'^2a^2-2cc'aa' \cos (B \pm B') \\
&= a^2b'^2+a'^2b^2-2aa'bb' \cos (C \pm C').
\end{aligned}
$$

Il existe encore cinq autres systèmes de formules analogues, que l'on peut déduire des précédentes, en remplaçant les lettres (a, b, c, A, B, C) respectivement par

$$(a, c, b, A, C, B)\,; \quad (b, a, c, B, A, C)\,; \quad (b, c, a, B, C, A)\,;$$
$$(c, a, b, C, A, B)\,; \quad (c, b, a, C, B, A).$$

Ces formules ont été trouvées, pour la première fois, par M. Bretschneider, qui les a démontrées par des voies différentes. (*Archives de Grunert*, t. II, p. 133.)

5. La figure du § 2 jouit de quelques propriétés intéressantes, que nous croyons utile d'indiquer.

La somme des angles A_1, B_1, C_1 étant égale à 2 droits, on conclut facilement que : a) *les circonférences circonscrites aux triangles* A_1BC, AB_1C, ABC_1 *se coupent en un même point* O ; b) *de ce point, on voit les côtés du triangle* ABC *sous des angles égaux à* $\pi - A'$, $\pi - B'$, $\pi - C'$; c) *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *passent par le point* O [1].

Le triangle ABA_1 donne

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A_1B}^2 - 2AB.\ A_1B \cos (B+B'_1)\,;$$

ou, à cause de $A_1B = \dfrac{c'a}{a'}$:

$$a'^2.\ \overline{AA_1}^2 = c^2a'^2 + c'^2a^2 - 2cc'aa' \cos (B+B')\,;$$

[1] Ces propositions ne font que généraliser celles qui sont connues pour le cas où les triangles A_1BC, AB_1C, ABC_1 sont équilatéraux. Voir, par exemple, les *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, par E. *Catalan*.

par conséquent

$$a'.\,AA_1 = b'.\,BB_1 = c'.\,CC_1 = \sqrt{8(T^2+SS')},$$

résultat qu'on pourrait conclure, en partie, de la similitude des triangles ABA_1, CBC_1.

Le théorème relatif au produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit conduit aux relations

$$a'.\,OA_1 = b'.\,OB + c'.\,OC,$$
$$b'.\,OB_1 = c'.\,OC + a'.\,OA,$$
$$c'.\,OC_1 = a'.\,OA + b'.\,OB,$$

d'où l'on déduit

$$a'.\,AA_1 = b'.\,BB_1 = c'.\,CC_1 = a'.\,OA + b'.\,OB + c'.\,OC$$
$$= \tfrac{1}{2}(a'.\,OA_1 + b'.\,OB_1 + c'.\,OC_1).$$

Soient α_3, β_3, γ_3 les points qui, par rapport aux triangles semblables A_1BC, AB_1C, ABC_1 sont les homologues du point N, considéré par rapport au triangle A'B'C'.

Si l'on fait

$$NA' = a'',\ NB' = b'',\ NC' = c'',$$

on a

$$A\beta_3 = \frac{a''b}{b'},\quad A\gamma_3 = \frac{a''c}{c'},$$

$$\overline{\beta_3\gamma_3}^2 = \overline{A\beta_3}^2 + \overline{A\gamma_3}^2 - 2A\beta_3.\,A\gamma_3.\cos(A+A');$$

d'où

$$\frac{\beta_3\gamma_3}{a''a'} = \frac{\gamma_3\alpha_3}{b''b'} = \frac{\alpha_3\beta_3}{c''c'} = \frac{\sqrt{8(T^2+SS')}}{a'b'c'}.$$

Ces relations montrent que si le triangle $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ est semblable à A'B'C', ses sommets sont les centres des circonférences circonscrites à A_1BC, AB_1C, ABC_1.

Lorsque le point N est sur la circonférence A'B'C', on a :

$$a''a' \pm b''b' \pm c''c' = 0;$$

par conséquent

$$\beta_3\gamma_3 \pm \gamma_3\alpha_3 \pm \alpha_3\beta_3 = 0:$$

les extrémités de trois arcs semblables, pris sur les circonférences A_1BC, AB_1C, ABC_1, *respectivement à partir des points* A_1, A', A *sont sur une même droite.*

On peut encore énoncer ce théorème, qui est peut-être nouveau, sous la forme suivante :

Trois circonférences α, β, γ *passent par un même point* O *et se coupent, deux à deux, aux points* A, B, C. *Soient* A_1, B_1, C_1 *les points où les cordes communes à deux des circonférences rencontrent la troisième. Si les rayons* αC, βC, γC_1 *tournent, avec la même vitesse, autour des centres, leurs extrémités et le point* O *sont toujours en ligne droite.*

La démonstration directe de cette proposition n'offre aucune difficulté.

6. Le point O jouit de la propriété de rendre minimum la quantité

$$\mu = a'. O'A + b'. O'B + c'. O'C,$$

O' désignant un point variable du plan ABC.

En effet, soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y) les coordonnées rectangulaires des points A, B, C, O' ; on a

$$\mu = \Sigma\, a' \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Pour le minimum de μ, il faut poser

$$\frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 0;$$

ou

$$\Sigma\, \frac{a'(x-x_1)}{O'A} = 0, \quad \Sigma\, \frac{a'(y-y_1)}{O'A} = 0.$$

Par conséquent

$$x = \Sigma\, \frac{a'x_1}{O'A} : \Sigma\, \frac{a'}{O'A}, \; y = \Sigma\, \frac{a'y_1}{O'A} : \Sigma\, \frac{a'}{O'A}.$$

Ces coordonnées définissent le centre de gravité de trois masses égales à $\frac{a'}{O'A}$, $\frac{b'}{O'B}$, $\frac{c'}{O'C}$, attachées, respectivement, aux points A, B, C. Or les masses qu'il faut fixer aux points A, B, C, pour que le point O en soit le centre de gravité, sont proportionnelles aux aires des triangles BOC, COA, AOB ; et l'on a

$$\begin{aligned} &BOC : COA : AOB \\ &= OB.OC \sin BOC : OC.OA \sin COA : OA.OB \sin AOB \\ &= \frac{\sin A'}{OA} : \frac{\sin B'}{OB} : \frac{\sin C'}{OC}. \end{aligned}$$

J. Neuberg.

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE.

—

Problème. *Trouver le lieu décrit par le point de contact mutuel de deux circonférences variables, tangentes à deux circonférences fixes* ([1]).

Soient R, R′ les rayons des circonférences données O, O′ ; d, la distance des centres de ces circonférences. Nommons α, β les coordonnées du centre de la circonférence variable C, dont le rayon sera représenté par ρ. Soient α', β', ρ' les quantités analogues, relatives à la circonférence C′. Enfin, appelons x, y les coordonnées du point de contact M. Nous aurons :

$$\alpha^2+\beta^2 = (R+\rho)^2 \quad (1), \qquad (d-\alpha)^2+\beta^2 = (R'+\rho)^2 \quad (2),$$
$$\alpha'^2+\beta'^2 = (R+\rho')^2 \quad (3), \qquad (d-\alpha')^2+\beta'^2 = (R'+\rho')^2 \quad (4),$$
$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2 = (\rho+\rho')^2 \quad (5),$$
$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-x} = \frac{\rho}{\rho'} \quad (6), \qquad \frac{y-\beta}{\beta'-y} = \frac{\rho}{\rho'} \quad (7)\ ([2])$$

Si, entre ces équations, nous éliminons α, β, α', β', ρ et ρ', nous obtiendrons l'équation du lieu cherché.

On satisfait aux équations (5), (6), (7) en prenant

$$x-\alpha = \rho\cos\varphi,\ y-\beta = \rho\sin\varphi,\ \alpha'-x = \rho'\cos\varphi,\ \beta'-y = \rho'\sin\varphi.$$

([1]) Ce problème est proposé, comme exercice, dans la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, et dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*. Plusieurs abonnés nous ont demandé que la *Nouvelle Correspondance* publiât les solutions de cette question et de quelques autres, réputées difficiles par les étudiants. La note actuelle est tirée de notre *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848). Quant à la solution *géométrique* du problème, on peut consulter les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 5e édit., p. 197.

([1]) Ces équations supposent que les quatre cercles O, O′, C, C′ sont, deux à deux, *extérieurs* l'un à l'autre.

Au moyen de ces relations, dont la signification géométrique est visible, les équations (1), (2), (3), (4) deviennent :

$$x^2 + y^2 - 2\rho\,(x \cos\varphi + y \sin\varphi) = R^2 + 2R\rho,$$
$$d^2 - 2d\,(x - \rho\cos\varphi) = (R' - R)\,(R' + R + 2\rho),$$
$$x^2 + y^2 + 2\rho'\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = R^2 + 2R\rho',$$
$$d^2 - 2d\,(x + \rho'\cos\varphi) = (R' - R)\,(R' + R + 2\rho').$$

Entre ces quatre équations, combinées deux à deux, éliminons ρ et ρ' ; nous obtiendrons, par un calcul facile :

$$(x^2 + y^2 - R^2)\,(R' - R - d\cos\varphi) =$$
$$(d^2 - 2dx + R^2 - R'^2)\,(R + x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$
$$(x^2 + y^2 - R^2)\,(R' - R + d\cos\varphi) =$$
$$(d^2 - 2dx + R^2 - R'^2)\,(R - x\cos\varphi - y\sin\varphi).$$

Ajoutant membre à membre, on trouve

$$(R' - R)\,(x^2 + y^2 - R^2) = R\,(d^2 - 2dx + R^2 - R'^2),$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{Rd}{R - R'}\,x + RR' + \frac{R}{R - R'}\,d^2 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Le lieu demandé est donc une circonférence ayant son centre I sur OO′, à une distance du centre O égale à $\frac{Rd}{R-R'}$. D'après cette valeur, *le centre* I *est le point de concours des tangentes communes aux cercles donnés*, extérieures à ces cercles. Quant au rayon l de la circonférence I, il est donné par la formule

$$l^2 = \left(\frac{Rd}{R - R'} - R\right)\left(\frac{R'd}{R - R'} + R'\right). \qquad \text{(B)}$$

Soient A, A′ les points où OO′ coupe les circonférences données. Le premier facteur représente OI — OA = IA ; le second représente IA′. Donc *le rayon* IM *est moyen proportionnel entre les distances* IA, IA′ [1].

---

[1] *Théorèmes et Problèmes*, p. 198.

REMARQUE. Les équations des cercles O, O′ étant

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \ (O), \quad (x-d)^2 + y^2 - R'^2 = 0 \ (O') \ ;$$

les cercles O, O′, I, considérés deux à deux, ont trois *axes radicaux*, dont les équations sont, d'après la règle connue:

$$(O,\ O') \qquad 2dx - d^2 - R^2 + R'^2 = 0,$$

$$(O,\ I) \qquad -R^2 + 2\frac{Rd}{R-R'}x - RR' - \frac{R}{R-R'}d^2 = 0,$$

$$(O',\ I) \qquad -2dx + d^2 - R'^2 + 2\frac{Rd}{R-R'}x - RR' - \frac{R}{R-R'}d^2 = 0.$$

En simplifiant les deux dernières, on retombe sur la première ; donc, *les trois axes radicaux coïncident ;* ou, ce qui est équivalent : les circonférences O, O′, I, *considérées deux à deux*, *ont les mêmes points d'intersection*, *réels ou imaginaires*

E. C.

THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE ;

par M. LOUIS SALTEL, professeur à Fontenay-le-Comte.

—

1. Théorèmes sur les courbes.

THÉORÈME I. *Soient* P *un point arbitraire d'une courbe plane* Σ, *du troisième ordre*, *et* PAB *une sécante quelconque*, *issue de ce point et rencontrant la courbe aux points* A, B. *Représentons par* (C, D, E), (C′, D′, E′) *six nouveaux points arbitraires de cette courbe*, *et considérons les deux coniques*

(ABCDE), (ABC′D′E′).

Si l'on désigne par λ, λ′ *les sixièmes points communs à ces coniques et à* Σ, *et par* α_1, α_2 *les points communs à cette dernière courbe et à une sécante arbitraire*, *issue de* P; *ces deux points* α_1, α_2 *sont les points homologues communs aux deux involutious que cette sécante détermine sur les deux quadrilatères*

(CDE λ), (C′D′E′λ′).

Remarque I. Lorsque l'on a déterminé les points P, A, B (C, D, λ), (C', D', λ'), ce théorème donne une génération de la courbe par la règle et le compas, qui est extrêmement simple.

Remarque II. Si les deux coniques (PBCDλ), (PB'C'D'λ') coïncident, Σ se compose de cette conique et de la droite PAB : dans ce cas, le théorème précédent se réduit au théorème de *Desargues*.

Théorème II. *La courbe la plus générale du troisième ordre peut être considérée comme le lieu des points doubles des séries de points en involution que détermine, sur un quadrilatère fixe, une sécante qui tourne autour d'un point fixe.*

—

2. Théorème sur les surfaces.

Théorème. *Toute surface* Σ, *du troisième ordre, à point double P et passant par le cercle de l'infini, est déterminée par un cercle quelconque* C *de cette surface et trois points arbitraires* A, B, C.

Cette surface peut être construite comme il suit :

Soient A', B', C' *les seconds points d'intersection des sphères* (CA), (CB), (CD) *avec les rayons* PA, PB, PC ; *si l'on considère un point quelconque* μ *du plan* π *déterminé par les trois points* A', B', C', *il est tel que le second point de rencontre du rayon* Pμ *avec la sphère* (Cμ) *est un point de la surface* Σ.

Remarque I. Le cône tangent en P, à Σ, est le cône qui a pour base le cercle d'intersection du plan π avec la sphère (CP). (Cette remarque constitue à elle seule l'étude des affections du point P.)

Remarque II. Les points réels de la surface, situés à l'infini, sont sur la droite de l'infini, située dans le plan qui passe par le point P et par la droite d'intersection du plan du cercle C avec le plan π.

Remarque III. Si l'on suppose le point P situé à l'infini, dans une direction donnée, la surface Σ se décompose et l'on en déduit la construction suivante d'une surface du second

ordre déterminée par un cercle C et quatre points PABC, dont l'un d'eux, P, est à l'infini, dans une direction donnée :

Soient A′, B′, C′ *les seconds points d'intersection des sphères* (CA), (CB), (CD) *avec les rayons* PA, PB, PC ; *si l'on considère un point quelconque* μ *du plan* π *déterminé par les points* A′, B′, C′; *ce point est tel, que le second point de rencontre du rayon* Pμ *avec la sphère* (Cμ) *est un point de la surface du second ordre.*

Fontenay-le-Comte, le 25 décembre 1874.

SUR LA FORMULE DU BINOME ;

à propos d'une Note de M. Janni [1].

I. De la relation connue

$$C_{n,p} + C_{n,\,p-1} = C_{n+1,p} \quad (^2), \qquad (1)$$

on conclut

$$C_{n-1,\,p-1} + C_{n-1,\,p-2} = C_{n,\,p-1},$$
$$C_{n-2,\,p-2} + C_{n-2,\,p-3} = C_{n-1,\,p-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n-p+1,\,1} + C_{n-p+1,\,0} = C_{n-p+2,\,1}\ ;$$

puis, en ajoutant *membre à membre* toutes ces égalités :

$$C_{n,p} + C_{n-1,\,p-1} + \ldots + C_{n-p+1,\,0} = C_{n+1,\,p}.$$

Soit $n-p+1=m$; d'où $n=m+p-1$. Renversant l'ordre des termes, on a

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.\,2\,\ldots\,p} \\ = \frac{(m+1)\,(m+2)\ldots(m+p)}{1.\,2\,\ldots\,p}. \end{aligned}\right\}\text{(A)}$$

---

[1] *Journal de Battaglini*, 1874.
[2] *Cours d'Analyse*, p. 40.

II. *La relation* (A), que nous venons de démontrer par la théorie des combinaisons, *subsiste pour toutes les valeurs de* m. En effet, l'égalité (1), d'où elle résulte, équivaut à l'identité

$$(n-p+1)+p=n+1.$$

III. Si l'on change m en $-m$, la formule (A) devient

$$\left.\begin{aligned} 1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \\ =\pm\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}. \end{aligned}\right\}(B)$$

Celle-ci a été donnée par M. *Janni.*

IV. Le premier membre de l'égalité (A) représente la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(1-1)^{-m}$. De même, le premier membre de (B) est la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(1-1)^{m}$. *Chacune de ces sommes est donc réductible à un monôme.* Au moyen de cette ingénieuse remarque, M. Janni a pu démontrer, plus simplement que je ne l'ai fait autrefois, les propositions suivantes :

1° m *étant une quantité positive, moindre que l'unité, on a*

$$\frac{1}{2^m}=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\ldots;$$

2° m *étant une quantité positive quelconque, on a*

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots;$$

3° m *étant une quantité positive quelconque, on a*

$$2^m=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots \text{ (1)}.$$

---

(1) *Comptes rendus*, tome XLV, p. 621. — Le prince *B. Boncompagni*, aussi célèbre par son érudition que par sa libéralité scientifique, a eu l'extrême obligeance de m'envoyer une *traduction française* du petit Mémoire de M. Janni. Cette traduction, imprimée, commence ainsi :

« La série binomiale, dans le cas de $x=-1$, peut se réduire im« médiatement à un produit infini. En effet, si on indique par S la « somme de la série, on a

$$\text{« } S=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots \text{ »}$$

V. Les formules de sommation, (A), (B), dues à M. Janni, sont d'autant plus curieuses, qu'il n'en saurait exister d'analogue, croyons-nous, pour *la somme des* $p+1$ *termes du développement de* $(1+1)^m$, m *étant positif*. Soit, en effet,

$$S_{p+1} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

D'après une formule de Poisson [1],

$$S_{p+1} = 2^m\,(p+1)\,\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots(p+1)}\int_0^1 \frac{t^{m-p-1}\,dt}{(1+t)^{m+1}};$$

ou, par le changement de $t+1$ en z :

$$S_{p+1} = 2^m\,(p+1)\,\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots(p+1)}\int_1^2 z^{-m-1}(z-1)^{m-p-1}dz.$$

Dans le cas le plus favorable, celui de m *entier positif*, l'intégrale se réduit à la différence de deux sommes, composées, chacune, de $m-p$ termes ; et la nouvelle expression de S_{p+1} est plus compliquée que la première.

VI. Quoiqu'il en soit, en égalant ces deux valeurs, on trouve la relation :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{p+1}\,\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}} - \frac{1}{p+2}\,\frac{2^{p+2}-1}{2^{p+2}}\,C_{m-p+1,1} + \frac{1}{p+3}\,\frac{2^{p+3}-1}{2^{p+3}}\,C_{m-p+1,2} - \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \pm \frac{1}{m}\,\frac{2^m-1}{2^m} \\ = \frac{1}{m.2^m}\,\frac{1.2.3\ldots\ldots p}{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}\,[1+C_{m,1}+C_{m,2}+\ldots+C_{m,p}] \end{array}\right\}(C).$$

Par exemple,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{31}{32} = \frac{1}{5.32}\cdot\frac{1.2}{4.3}\,[1+5+10].$$

E. CATALAN.

Que l'honorable auteur nous permette ici une légère critique. L'expression : *Somme d'une série*, est inadmissible, quand la convergence de la série n'est pas démontrée.

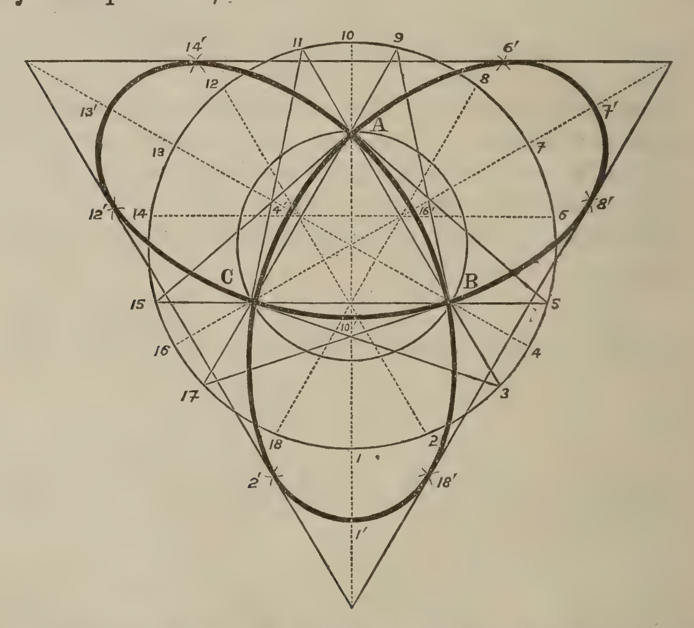
[1] *Bulletins de l'Académie de Belgique*, avril 1867.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LA NOUVELLE CORRESPONDANCE

Question 22.

(N. C. M., p. 67.)

Etant donnés trois points fixes, trouver le lieu d'un quatrième point tel, que les axes des deux paraboles passant par ces quatre points, forment entre eux un angle donné (Concours d'admission à l'École polytechnique. 1874).



I. *Equation du lieu, en coordonnées obliques.* Soient A, B, C les trois points donnés. Prenons la droite CB pour axe des x, la droite CA pour axe des y; désignons par a l'abcisse du point B, par b l'ordonnée du point A. L'équation d'une parabole, dont l'axe est parallèle à la droite représentée par

$$y = lx,$$

et passant par les trois points A, B, C, est

(1) $$(y - lx)^2 - al^2x - by = 0.$$

Supposons que, dans cette équation (1), x et y représentent les coordonnées d'un point du lieu cherché. En appelant m, n les coefficients angulaires des axes des deux paraboles passant par ce point, m et n seront les racines de l'équation (1). On aura donc :

$$m + n = \frac{2xy}{x(x-a)},$$

$$mn = \frac{y(y-b)}{x(x-a)},$$

$$m - n = \frac{2\sqrt{xy(ay+bx-ab)}}{x(x-a)}.$$

Appelons η l'angle constant sous lequel se coupent les axes des deux paraboles :

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{(m-n)\sin C}{1 + mn + (m+n)\cos C},$$

ou

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{2 \sin C \sqrt{xy(ay+bx-ab)}}{x(x-a) + y(y-b) + 2xy\cos C},$$

ou encore

$$\operatorname{tg}^2 \eta \, [x(x-a) + y(y-b) + 2xy\cos C]^2 = 4\sin^2 C xy(ay+bx-ab);$$

ou enfin, en posant :

$$u = x(x-a) + y(y-b) + 2xy\cos C,$$

$$z = ay + bx - ab:$$

$$\operatorname{tg}^2 \eta . u^2 = 4xyz \sin^2 C.$$

Telle est l'équation du lieu. L'équation $u = 0$ représente le cercle circonscrit au triangle ABC; $z=0$ représente la droite AB.

En général, le lieu est une *quartique trinodale*, ou courbe du quatrième degré ayant trois points doubles; savoir, les sommets du triangle ABC. En effet, $x = 0$, par exemple, donne $u^2 = 0$; les quatre points d'intersection de CA avec la courbe, coïncident donc deux à deux. Le lieu reste le même si l'on change η en $\pi - \eta$, ce qui est évident *a priori*.

Dans le cas où $\eta = \frac{\pi}{2}$, la courbe se réduit à *deux fois* le cercle circonscrit au triangle ABC. Si $\eta = 0$, elle se réduit aux trois droites AB, BC, CA, auxquelles il faut joindre *la droite de l'infini*, comme nous le montrerons plus bas. La forme de la courbe, dont nous nous occuperons au n° IV, fait comprendre comment la quartique trinodale peut se réduire ainsi à un cercle double, ou à trois (quatre) droites.

II. *Equation du lieu, en coordonnées trilinéaires.* Prenons le triangle ABC pour triangle de référence : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ seront, respectivement, les équations des côtés BC, CA, AB. Appelons T l'aire du triangle ABC, R le rayon du cercle circonscrit, c le côté AB. On a, comme l'on sait :

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C},$$

$$2T = ab \sin C = a\alpha + b\beta + c\gamma = 2R(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C),$$

$$\alpha = y \sin C, \qquad \beta = x \sin C.$$

Par suite :

$$(ay + bx - ab) \sin C = a\alpha + b\beta - 2T = - c\gamma,$$

et

$$ay + bx - ab = - \frac{c}{\sin C} \gamma = - 2R\gamma.$$

De même,

$$\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = - u \sin A \sin B \sin C.$$

L'équation du lieu sera donc :

$$\operatorname{tg}^2 \eta (\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B)^2 = - 8 R\alpha\beta\gamma \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C;$$

ou, en multipliant par

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{T}{R}:$$

$$\operatorname{tg}^2 \eta T (\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B)^2 =$$
$$- 8R^2 \alpha\beta\gamma \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C (\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C).$$

En observant que :

$$T = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

on a :

$$\operatorname{tg}^2 \eta(\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B)^2 = -4\alpha\beta\gamma \sin A \sin B \sin C (\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C).$$

Posons :

$$K = \alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B,$$
$$I = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C,$$
$$h \operatorname{tg}^2 \eta = \sin A \sin B \sin C ;$$

nous pourrons mettre l'équation du lieu sous la forme :

$$K^2 = -4h\alpha\beta\gamma I \text{ (}^1\text{)} \qquad (2)$$

L'équation (2) montre que, dans le cas où $\operatorname{tg} \eta = 0$, le lieu se réduit aux droites AB, BC, CA, et à la *droite de l'infini*, dont l'équation est :

$$I = 0.$$

III. *Transformation arguesienne* [2]. Pour étudier la quartique trinodale, dont nous venons de donner l'équation, nous devons d'abord donner, d'après Salmon, quelques notions relatives à la transformation quadratique ou arguesienne.

1° Le point dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma},$$

est appelé l'*arguesien* du point ayant pour coordonnées α, β, γ. Les lignes dont les équations sont :

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad F(\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta) = 0,$$

sont dites arguesiennes l'une de l'autre. En général, à un seul point de la première courbe, correspond un seul point de la se-

---

[1] $K = 0$ représente d'ailleurs le cercle circonscrit au triangle ABC.

[2] Nous avons engagé l'auteur de la solution à se servir de cette désignation, afin d'appeler l'attention des lecteurs de la *Nouvelle Correspondance* sur la transformation arguesienne de M. Saltel, qui est identique, à une transformation linéaire près, à la transformation quadratique. Voir, sur celle-ci, un article de M. Mathieu (*Nouvelles Annales* 1865). (P. M)

conde, et réciproquement. Cependant, il y a des exceptions, comme on va le voir.

2° Les trois droites représentées par :

$$l\alpha = m\beta = n\gamma,$$

se coupent en un point P qui a, pour arguesien, le point d'intersection P′ des droites ayant pour équations

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}.$$

Il est facile de construire géométriquement le point P′, quand on se donne le point P. En effet : joignons le point P à deux sommets du triangle de référence, et construisons, par rapport aux bissectrices passant par chaque sommet, les symétriques des droites ainsi menées : le point d'intersection des nouvelles droites est P′ (Salmon, *Coniques*, n° 55).

3° On reconnaît, d'après cette construction, que les lignes représentées par les équations

$$l\alpha = m\beta = n\gamma,$$

ont pour arguesiennes celles qui sont données par les relations

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}.$$

Mais les droites BC, CA, AB correspondent, respectivement, aux points

A, B, C,

et non à d'autres lignes. On arrive au même résultat, mais d'une manière moins claire, par l'Analyse.

4° L'arguesienne du cercle circonscrit, représenté par

$$K = \alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 0,$$

a pour équation

$$\frac{\sin C}{\alpha\beta} + \frac{\sin A}{\beta\gamma} + \frac{\sin B}{\alpha\beta} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0.$$

La droite de l'infini est donc l'arguesienne du cercle circonscrit ; et réciproquement.

5° *L'arguesienne d'une droite quelconque ayant pour équation*

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

est une conique circonscrite au triangle ABC, *représentée par*

$$l\beta\gamma + m\alpha\gamma + n\alpha\beta = 0\ ;$$

et réciproquement.

Si la droite coupe le cercle circonscrit, la conique a deux points réels à l'infini, situés sur la droite de l'infini, c'est donc une hyperbole. Si la droite ne coupe pas le cercle circonscrit, la conique, n'ayant aucun point réel à l'infini, est une ellipse. Si la droite est tangente au cercle circonscrit, la conique arguesienne sera tangente à l'arguesienne du cercle circonscrit, c'est-à-dire à la droite de l'infini. Ce sera donc une parabole (Salmon, *Coniques,* n° 254).

Ainsi, *les paraboles dont le quatrième point d'intersection engendre la quartique trinodale, ont pour arguesiennes des tangentes au cercle circonscrit.*

IV. *La quartique trinodale est l'arguesienne d'un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle de référence.* L'arguesienne de la quartique trinodale est, d'après les considérations précédentes, représentée par

$$\operatorname{tg}^2\eta\left(\frac{\sin C}{\alpha\beta}+\frac{\sin A}{\beta\gamma}+\frac{\sin B}{\gamma\alpha}\right)^2=$$

$$-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}\sin A\sin B\sin C\left(\frac{\sin A}{\alpha}+\frac{\sin B}{\beta}+\frac{\sin C}{\gamma}\right);$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\eta\,(\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C)^2=$$
$$-4\sin A\sin B\sin C\,(\alpha\beta\sin C+\beta\gamma\sin A+\gamma\alpha\sin B);$$

équation que l'on peut encore écrire :

$$\operatorname{tg}^2\eta.\,I^2=-4K\sin A\sin B\sin C.$$

Celle-ci représente un cercle 1234... concentrique au cercle circonscrit. Pour déterminer le rayon de ce cercle, revenons aux coordonnées obliques. Nous avons vu que

$$K=-u\sin A\sin A\sin C;$$

donc

$$I^2.\operatorname{tg}^2\eta=4u\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C.$$

Or,

$$I^2R^2=T^2=4R^4\sin^2A\sin^2B\sin^2C,$$

en sorte que l'équation du cercle se réduit à

$$R^2\operatorname{tg}^2\eta=u=x(x-a)+y(y-b)+2xy\cos C.$$

Le rayon de ce cercle a pour valeur $\frac{R}{\cos \eta}$. Il se construit au moyen d'un triangle rectangle.

L'angle compris entre deux tangentes, menées d'un point du cercle concentrique au cercle circonscrit, tangentes qui sont les arguesiennes des paraboles dont le quatrième point d'intersection engendre la quartique trinodale, *est égal à* $\pi - 2\eta$.

Le cercle concentrique étant construit, on obtiendra autant de points de la courbe que l'on voudra, par la construction indiquée plus haut. La courbe passe par les points A et B, en restant entre le cercle et le côté AB, mais extérieurement au triangle; au point B elle sort du cercle, décrit une sorte d'ovale, de manière à revenir au point C, où elle rentre dans le cercle, et passe entre le cercle et le côté CA, toujours extérieurement au triangle; repasse par le point A, et décrit ensuite, sur AB et AC, des ovales analogues à celle qui se trouve au-dessous de CB.

V. *Tangentes aux points doubles.* Les tangentes aux points doubles ont pour équations :

$$(\beta \sin C + \gamma \sin B)^2 + 4h\beta\gamma \sin A = 0,$$
$$(\gamma \sin A + \alpha \sin C)^2 + 4h\alpha\gamma \sin B = 0,$$
$$(\alpha \sin B + \beta \sin A)^2 + 4h\alpha\beta \sin C = 0.$$

Leurs arguesiennes sont représentées par

$$(\gamma \sin C + \beta \sin B)^2 + 4h\beta\gamma \sin A = 0,$$
$$(\alpha \sin A + \gamma \sin C)^2 + 4h\alpha\gamma \sin B = 0,$$
$$(\beta \sin B + \alpha \sin A)^2 + 4h\alpha\beta \sin C = 0.$$

Or, si l'on fait successivement :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

dans l'équation du cercle arguesien de la quartique, on trouve les trois dernières équations; donc *les arguesiennes des tangentes aux points doubles passent par les intersections des côtés du triangle avec le cercle concentrique.* Ces tangentes sont les droites A5, A15, B9, B17, C3, C11.

Il est facile de démontrer géométriquement cette propriété,

comme le fait Salmon, qui donne encore beaucoup d'autres propriétés des quartiques trinodales ([1]).

VI. *Bitangentes.* On peut écrire l'équation de la quartique sous les quatre formes :

$$(\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B)^2 = - 4h\alpha\beta\gamma I,$$

$$(- \alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B)^2 =$$
$$- \alpha\beta\gamma (4hI + \beta \sin A \sin C + \alpha \sin B \sin C),$$

$$(\alpha\beta \sin C - \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B)^2 =$$
$$- \alpha\beta\gamma (4hI + \beta \sin A \sin C + \gamma \sin A \sin B),$$

$$(\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A - \gamma\alpha \sin B)^2 =$$
$$- \alpha\beta\gamma (4hI + \gamma \sin A \sin B + \alpha \sin B \sin C).$$

D'après cela, il est évident que les bitangentes ont pour équations

$$I = 0,$$
$$4hI + \beta \sin A \sin C + \alpha \sin B \sin C = 0,$$
$$4hI + \beta \sin A \sin C + \gamma \sin A \sin B = 0,$$
$$4hI + \gamma \sin A \sin B + \alpha \sin B \sin B = 0.$$

Leurs points de contact se trouvent sur les coniques dont les équations sont :

$$K = 0,$$
$$- \alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 0,$$
$$\alpha\beta \sin C - \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 0,$$
$$\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin B - \alpha\gamma \sin B = 0.$$

Les arguesiennes de ces coniques sont représentées par :

$$I = 0,$$
$$\alpha \sin A + \beta \sin B - \gamma \sin C = 0,$$
$$- \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0,$$
$$\alpha \sin A - \beta \sin B + \gamma \sin C = 0.$$

Ces trois dernières équations appartiennent aux droites qui joignent, deux à deux, les pieds des médianes du triangle ABC.

([1]) Salmon, *Higher plane Curves*, nos 283 et suivants. M. Saltel, dans son deuxième Mémoire sur la transformation arguesienne, donne l'énoncé de *cent* théorèmes sur les quartiques trinodales générales (P. M).

Leurs intersections 6, 14, 8, 18, 12, 2, avec le cercle arguesien de la quartique, donnent les arguesiens des points de contact, qu'il est facile de déterminer.

L. Philippin,

élève de deuxième année à l'École normale des Sciences[1].

Note. — Il serait intéressant de démontrer géométriquement que les axes des paraboles, arguesiennes des tangentes menées, des points du cercle concentrique, au cercle circonscrit au triangle ABC, font entre eux un angle égal à la moitié du supplément de l'angle de ces tangentes (V. le n° IV de la solution précédente).

Question 24.

(N. C. M. p. 67.)

a, b *étant deux nombres entiers, décomposer, en trois carrés entiers,*

$$(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2.$$

I. On a, identiquement,

$$(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2 =$$
$$[(1+a)(a+b)]^2+[(1+b)(a+b)]^2+(1+a+b-ab)^2. \quad (1) \ [2]$$

II. Si l'on remplace a et b par $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, on trouve, au lieu de l'identité (1) :

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[(a+c)(a+b)]^2+[(b+c)(a+b)]^2+(c^2+ac+bc-ab)^2. \quad (2)$$

---

(1) C'est M. J. Derousseaux, condisciple de M. Philippin, qui a fourni à celui-ci l'équation du lieu, en coordonnées obliques (P. M).

(2) J'ai trouvé cette décomposition en traitant le *Problème de Malfatti* (*Bulletins de l'Académie de Belgique,* octobre 1874). D'un autre côté, l'équation de la *toroïde* conduit à l'identité

$$(a^6+7a^3b^3+b^6)^2 = (a^4+2ab^3)^3+(b^4+2a^3b)^3+(3a^2b^2)^3,$$

laquelle donne une infinité de solutions de l'équation

$$u^2 = x^3+y^3+z^3.$$

S'il s'agissait de montrer combien est importante l'*Application de la Géométrie à l'Algèbre et à l'Arithmétique*, ces deux exemples seraient peut-être jugés insuffisants. Mais il y en a un autre, bien mémorable : *Douze siècles avant Euler, et probablement au moyen de considérations géométriques,* Brahmegupta *résolvait, en nombres entiers, l'équation* $Cx^2+A=y^2$. (Chasles, *Aperçu historique.*)

Le premier membre est une fonction symétrique ; donc

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[(b+a)(b+c)]^2+[(c+a)(b+c)]^2+(a^2+ba+ca-bc)^2, \quad (3)$$
$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[(c+b)(c+a)]^2+[(a+b)(c+a)]^2+(b^2+cb+ab-ca)^2. \quad (4)$$

Exemple : $a=5$, $b=3$, $c=4$. Les trois dernières relations deviennent :

$$(25+9+16+12+20+15)^2=(9.8)^2+(7.8)^2+(16+8.4-15)^2$$
$$=(8.7)^2+(9.7)^2+(25+7.5-12)^2$$
$$=(7.9)^2+(8.9)^2+(9+9.3-20)^2;$$

ou

$$97^2=72^2+56^2+33^2=56^2+63^2+48^2=63^2+72^2+16^2;$$

ou enfin

$$9\,409=5\,184+3\,136+1\,089=3\,136+3\,969+2\,304=$$
$$3\,969+5\,184+256;$$

ce qui est exact.

III. On a

$$a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab =$$
$$\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Parmi les nombres entiers a, b, c, il y en a deux, au moins, de même parité : appelons-les b, c. Soient ensuite :

$$a+\frac{b+c}{2}=f,\ \frac{b+c}{2}=g,\ \frac{b-c}{2}=h.$$

Au moyen de ces nouvelles notations, nous pourrons écrire ainsi les identités (2), (3), (4) :

$$(f^2+2g^2+h^2)^2=(f^2-h^2)^2+[2g(f+h)]^2+(2fh-2g^2)^2, \quad (5)$$
$$(f^2+2g^2+h^2)^2=[2g(f+h)]^2+[2g(f-h)]^2+(f^2-2g^2+h^2)^2, \quad (6)$$
$$(f^2+2g^2+h^2)^2=(f^2-h^2)^2+[2g(f-h)]^2+(2fh+2g^2)^2. \quad (7)$$

IV. M. Neuberg, notre honorable et zélé collaborateur, nous a fait observer que

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 =$$
$$[a(a+b+c)]^2+[b(a+b+c)]^2+[c(a+b+c)]^2+(bc+ca+ab)^2.$$

En conséquence,

$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(f^2-g^2)^2+[(f+g)(g+h)]^2+[(f+g)(g-h)]^2+(h^2-2fg+g^2) \; ; \quad (9)$$

et, par l'interversion des lettres f, h :

$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(h^2-g^2)^2+[(f+g)(g+h)]^2+[(f-g)(g+h)]^2+(f^2-2gh+h^2)^2. (10)$$

V. Si l'on change f en $-f$, g en $-g$, h en $-h$, on obtient encore :

$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(f^2-g^2)^2+[(f-g)(g+h)]^2+[(f-g)(g-h)]^2+(g^2+2fg+h^2)^2, \quad (11)$$
$$(f^2+2g^2+h^2)^2 =$$
$$(g^2-h^2)^2+[(f-g)(g-h)]^2+[(f+g)(g-h)]^2+(f^2+2gh+g^2)^2. \quad (12)$$

VI. D'après un théorème connu [1], *tout nombre impair est de la forme* $f^2+2g^2+h^2$. Donc *tout carré impair est généralement décomposable en trois carrés et en quatre carrés* [2].

Exemple. Soient $f=2$, $g=3$, $h=5$; d'où résulte $f^2+2g^2+h^2 = 47$. On a donc

$$47^2 = 21^2+42^2+2^2 = 42^2+18^2+11^2 = 21^2+18^2+38^2$$
$$= 5^2+40^2+10^2+22^2 = 16^2+40^2+8^2+17^2 = 5^2+8^2+2^2+46^2$$
$$= 16^2+2^2+10^2+43^2.$$

VII. Chacune des relations (5), (6), (7) permet de *trouver un nombre qui soit, en même temps, une somme et une différence de deux carrés*. En particulier, l'identité (6) donne

$$P^2-Q^2 = [2g(f+h)]^2 + [2g(f-h)]^2 \; ;$$

en supposant

$$P = f^2+2g^2+h^2, \quad Q = f^2-2g^2+h^2. \text{ [3]}$$

E. C.

Note. Des solutions de la question 24 nous ont été envoyées par MM. Van Aubel, Ledent et P. S.

---

(1) Legendre, *Théorie des nombres*, tome I, p. 216.

(2) Les cas d'exception, assez nombreux, résultent des identités ci-dessus. Voici les principaux : 1° $f=0$; 2° $g=0$; 3° $h=0$; 4° $f=g$; 5° $f=h$; 6° $g=h$; 7° $fh=g^2$; 8° $f^2+g^2=2gh$; 9° $g^2+h^2=2fg$.

(3) Les nombres P, Q pourraient être dits, *associés*.

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

38. Démontrer que les seules racines réelles de l'équation

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0, \qquad (1)$$

sont

$$0, -1 \text{ et } -\frac{1}{2}.$$

39. Former l'équation qui n'admet que les racines imaginaires de la proposée, c'est-à-dire, *trouver le quotient* Q *de*

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

par

$$x(x+1)(2x+1). \text{ [1]}$$

40. Prouver que, si l'on fait $y = 2x + 1$, la *transformée* de l'équation réduite est

$$C_1 y^{2n-4} + (C_1 + C_3) y^{2n-6} + (C_1 + C_3 + C_5) y^{2n-8} + \ldots$$
$$+ (C_1 + C_3 + \ldots + C_{2n-3}) y^0 = 0. \qquad (2)$$

Dans celle-ci :

$$C_1 = \frac{2n}{1},\ C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}, \ldots$$

(E. C)

41. Si $n = \mathfrak{M}.\,3+1$, on a, identiquement,

$$C_{2n,1} - 3C_{2n,3} + 3^2 C_{2n,5} - \pm 3^{n-1} C_{2n,1} = 2^{2n-1}.$$

---

[1] Afin d'engager nos jeunes lecteurs à effectuer cette division, nous leur indiquons le résultat du calcul :

$$Q = (x+1)^{2n-4} + (x+1)^{2n-5} + (x+1)^{2n-6} + \ldots + (x+1) + 1$$
$$+ x[(x+1)^{2n-4} - x(x+1)^{2n-5} + x^2(x+1)^{2n-4} - \ldots - x^{2n-5}(x+1) + x^{2n-4}]$$
$$- x^{2n-3} + x^{2n-4} - x^{2n-5} + \ldots - x + 1.$$

Par exemple, pour $n = 7$:

$$\frac{14}{1} - 3.\frac{14.13.12}{1.2.3} + 9.\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4\,5} - 27.\frac{14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$+ 81.\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5} - 243.\frac{14.13.12}{1.2.3} + 729.\frac{14}{1} = 2^{13}.$$

(E. C)

42. Trouver trois nombres entiers, premiers entre eux deux à deux, tels que la somme de deux quelconques d'entre eux n'admette pas de facteurs premiers autres que ceux qui sont contenus dans le troisième. Exemple : 3, 5, 22.

(Ernest Quetelet.)

43. Soient a, b, c, d les côtés consécutifs d'un quadrilatère ; δ, la droite qui joint les milieux des diagonales ; A, l'aire du quadrilatère. 1° Démontrer la relation

$$16\delta^2 A = (d^2 - b^2)\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - 4\delta^2)^2}$$
$$+ (c^2 - a^2)\sqrt{4b^2d^2 - (b^2 + d^2 - 4\delta^2)^2}.$$

2° Vérifier qu'elle s'accorde avec la formule de M. *Dostor* :

$$16A^2 = 4x^2y^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \quad (^1)$$

Dans celle-ci, x et y représentent les longueurs des diagonales.

Remarques I. Les radicaux doivent être pris avec des signes convenables.

II. La formule proposée devient illusoire si $\delta = 0$: le quadrilatère est alors un parallélogramme.

(E. C)

44. μ étant une quantité positive quelconque,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{\mu + 2n - 1} + \frac{1}{\mu + 2n} - \frac{1}{\mu + n}\right] = 1\,2 \qquad \text{(E. C)}$$

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1848.

NOTE SUR LE PRINCIPE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE, ET SUR SON APPLICATION A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DES ERREURS ;

par M. le Capitaine De Tilly,

Professeur à l'École militaire, etc.

—

J'ai publié récemment [1] une exposition de la *Théorie mathématique des erreurs*, qui, pour le fond, n'est autre que celle de Gauss, mais avec quelques additions, modifications et observations, dont il n'était pas possible de rendre compte, au point de vue théorique, dans un ouvrage destiné surtout à l'enseignement de l'Artillerie.

Je désire combler ici cette lacune, et indiquer les motifs du choix que j'ai fait parmi les méthodes qui pouvaient me servir à exposer la théorie des erreurs (principalement celles de Gauss, de Laplace et de Hagen), et de la manière dont j'ai présenté le principe de la Moyenne arithmétique, qui me sert de base. Je serai conduit par là à quelques observations peut-être nouvelles et à coup sûr peu connues, bien que tout à fait élémentaires.

I.

Quant au choix de la méthode, j'ai donné la préférence à celle de Gauss sur celle de Laplace, pour des raisons exposées en partie dans mon ouvrage même :

La théorie de Gauss est basée sur deux postulatums : celui de la moyenne, et celui de l'existence d'une fonction analytique de x, pouvant représenter la probabilité d'une erreur comprise entre zéro et x.

---

[1] Conférences militaires belges. Balistique. Bruxelles, Muquardt, 1875 ; pages 155 et suivantes.

La théorie de Laplace, au contraire, n'emploie que ce dernier postulatum et en déduit la justification du principe de la moyenne, *pour un nombre très grand de quantités*, et même de la règle des moindres carrés, *pour un nombre très grand d'équations*.

J'ai préféré la première méthode, bien qu'elle ait, au moins en apparence, un postulatum de plus : d'abord, parce que l'exposition est alors infiniment plus simple ; ensuite, parce que la restriction résultant d'un nombre *très grand* de données ou d'équations est loin de se vérifier toujours dans les applications ; enfin, parce que l'expression analytique d'une probabilité, qui, dans la théorie de Gauss, conduit à la règle des Moindres carrés, est en outre utile par elle-même et trouve de nombreuses applications directes, en vue desquelles le postulatum de la moyenne devient donc nécessaire.

On peut dire que la théorie de Laplace est une solution admirable d'une question autre que la question réellement posée dans les applications. Après y avoir démontré le principe de la moyenne et la règle des moindres carrés, pour un nombre infini de valeurs ou d'équations, il faut bien, sous peine de n'en pouvoir faire aucun usage, admettre implicitement le postulatum suivant :

La règle des moindres carrés, rigoureuse pour un nombre d'équations *infini*, peut être admise, au moins approximativement, lorsque le nombre des équations est limité.

Mais ce postulatum équivaut alors, et même sous une forme plus compréhensive, au second postulatum de la méthode de Gauss, que l'on peut énoncer en ces termes :

La règle de la moyenne, rigoureuse pour un nombre infini de valeurs et pour le cas de deux valeurs (¹), peut être admise, au moins approximativement, lorsque le nombre des valeurs est limité et quelconque.

La méthode de Gauss aurait donc l'un de ses postulatums commun avec l'un de ceux de Laplace, et l'autre compris dans

(¹) Voir, plus loin, la justification de ce point.

un postulatum correspondant de Laplace. C'est pourquoi je disais, tout à l'heure, que la différence entre les principes admis de part et d'autre est plus apparente que réelle.

Quant à la méthode de Hagen, qui décompose l'erreur totale en erreurs élémentaires, pouvant se produire toutes avec une égale facilité, j'ai cru devoir l'écarter, parce que l'hypothèse fondamentale de Hagen me paraît vicieuse. Lorsque, d'une urne renfermant un nombre infini de boules, dont la moitié sont blanches et l'autre moitié noires, on tire, par exemple, vingt boules blanches, il y a encore la même probabilité pour que la boule suivante soit blanche ou noire. Mais, lorsque dans une mesure, on a commis une erreur positive résultant de l'accumulation d'erreurs élémentaires, toutes positives, il ne doit plus y avoir la même probabilité de commettre une nouvelle erreur positive, qui aggraverait l'inexactitude du résultat, que de commettre une erreur négative égale, laquelle viendrait l'atténuer.

D'ailleurs, M. Lindelöf a présenté, dans le *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, T. II, une autre objection importante contre cette méthode.

Enfin, outre ses vices théoriques, elle est plus compliquée que celle de Gauss, en ce qui concerne la théorie des erreurs proprement dite.

II.

A l'exemple de Gauss, je prends donc, comme point de départ, le principe ou le postulatum de la moyenne arithmétique, appliqué non seulement à un nombre infini de quantités, mais à un nombre quelconque, depuis *deux* jusqu'à l'*infini*, pourvu que, dans l'application, il s'agisse toujours, bien entendu, de quantités, ou plutôt de valeurs d'une même quantité, également dignes de confiance et parmi lesquelles on n'ait aucune raison de préférer les unes aux autres.

Ce principe a été souvent critiqué ou déclaré douteux ; mais la plupart des critiques étaient basées sur des exemples où les valeurs données étaient loin de présenter la même apparence de vérité, et où l'on aurait eu, d'avance, des raisons très-

sérieuses de préférer les unes aux autres, ou bien de supposer qu'il y avait eu, dans les mesures, des erreurs autres que les erreurs accidentelles [1].

D'autres fois, on a dit qu'au lieu de prendre la moyenne entre des valeurs très différentes, il serait préférable de s'abstenir, comme si ce n'était pas sortir de la question.

Évidemment, ce ne sont point ces objections-là que je me propose de rencontrer ; mais on trouve dans des ouvrages très estimés, parmi lesquels je me bornerai à citer le récent et excellent Traité de M. Laurent [2] que, même entre des valeurs également dignes de confiance, il n'y a pas plus de raison pour adopter la moyenne arithmétique que toute autre expression, intermédiaire entre les résultats trouvés, et symétrique par rapport à ceux-ci, par exemple la moyenne proportionnelle ou géométrique. Je ne partage pas cette opinion et j'ai indiqué la mienne, en quelques lignes, dans l'ouvrage didactique dont je parlais plus haut [3] :

A. Le principe de la moyenne, pour un nombre infini de valeurs, résulte immédiatement de la définition même des erreurs accidentelles ;

B. Ce principe, pour deux quantités, peut se démontrer quand on admet le second postulatum (expression de la probabilité par une fonction analytique) ;

C. Si l'on admettait encore le même principe pour trois quantités, il pourrait alors être démontré d'une manière générale ;

D. Mais c'est la dernière réduction dont il soit susceptible, et, par conséquent, il est plus simple de l'admettre complétement dès le début, comme nous l'avons fait.

La justification des quatre assertions précédentes forme l'objet de ce paragraphe.

---

(1) Ces dernières sont les seules dont il soit question ici et dans ma *Théorie des erreurs*.

(2) Pages 160 et 170.

(3) *Conférences sur la Balistique*, page 163, en note.

A. Sur la première, je crois être d'accord avec tout le monde, puisqu'il ne s'agit que d'erreurs accidentelles ; aussi la théorie de Laplace est surtout remarquable en ce qu'elle conduit à la règle des moindres carrés, pour un nombre infini d'équations, ce qui est beaucoup plus général que le principe de la moyenne.

Mais il est essentiel d'observer que, si l'on pouvait prendre la moyenne entre un nombre *infini* de valeurs, on aurait, non seulement la valeur la plus probable de l'inconnue, mais sa valeur exacte; car, en vertu de la définition même des erreurs accidentelles, celles-ci devraient se compenser. C'est bien ainsi que cette définition doit être entendue.

B. Quand on admet que la probabilité d'une erreur comprise entre zéro et x peut s'exprimer par une fonction analytique $\varphi(x)$, ou, ce qui revient au même, que la probabilité d'une erreur comprise entre x et $x + dx$ s'exprime par $\varphi'(x)dx$, on peut démontrer le principe de la moyenne entre deux valeurs a et b $(a < b)$, supposées également dignes de confiance. En effet, la valeur la plus rationnelle c doit être intermédiaire entre a et b ; de plus, les différentes valeurs, de c à a, doivent devenir de moins en moins rationnelles, puisqu'on y tient compte, de moins en moins, de l'existence de la valeur b ; et de même les valeurs, de c à b, doivent devenir de moins en moins rationnelles, parce qu'on y tient compte, de moins en moins, de l'existence de la valeur a. Mais, d'un autre côté, dire que c est la valeur la plus rationnelle de la quantité cherchée, revient à dire qu'il y avait plus de probabilité pour que les deux erreurs commises dans les mesures a et b fussent renfermées entre les limites respectives

$$c-a \text{ et } c-a+dx,$$
$$b-c \text{ et } b-c+dx,$$

que dans d'autres limites quelconques, ne différant de celles-ci que par la valeur de c. En d'autres termes encore, une valeur de y, prise pour c, sera d'autant plus rationnelle que le produit

$$\varphi'(y-a)\,\varphi'(b-y)$$

sera plus grand.

De cette observation et des précédentes, il résulte que la fonction φ doit être telle que

$$\varphi'(y-a)\,\varphi'(b-y)$$

n'ait, entre $y=a$ et $y=b$, qu'un seul maximum et aucun minimum [1]. Le maximum correspondra à $y=c$. Mais il est donné par

$$\varphi''(y-a)\,\varphi'(b-y)-\varphi'(y-a)\,\varphi''(b-y)=0,$$

ou

$$\frac{\varphi''(y-a)}{\varphi'(y-a)}=\frac{\varphi''(b-y)}{\varphi'(b-y)}.$$

Cette équation est évidemment vérifiée par

$$y-a=b-y,$$

ou

$$y=\tfrac{1}{2}(a+b),$$

valeur qui est bien comprise entre a et b. C'est donc là le maximum cherché, puisqu'il doit être unique et qu'il ne peut pas y avoir de minimum. Ainsi :

$$c=\tfrac{1}{2}(a+b).$$

Ce raisonnement, qui paraît si simple et si rigoureux, dans le cas de deux valeurs, est impossible à reproduire ou à imiter pour un plus grand nombre.

C. Si l'on admettait encore le principe pour *trois quantités*, il pourrait être démontré d'une manière générale.

En effet, il suffirait alors d'appliquer la méthode de Gauss, ou, ce qui revient au même, celle de la page 168 de mon ouvrage cité plus haut, en supposant les quantités sur lesquelles on opère au nombre de trois seulement [2].

---

(1) Ceci peut être considéré, à la rigueur, comme une condition imposée à la fonction φ. C'est peut-être une raison de plus pour admettre, dès l'abord, le principe général de la moyenne.

(2) Puisqu'il n'y a que des erreurs accidentelles, qui se produisent avec la même facilité dans les deux sens, $\varphi(-x)$ doit nécessairement être égal

On en déduirait la forme connue :

$$\varphi'(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2};$$

et de là on passerait, toujours par la méthode connue, à la loi des moindres carrés, comprenant le principe général de la moyenne.

Mais, je le répète, il faudrait pour cela que le principe de la moyenne fût d'abord admis pour trois quantités ; car la démonstration de Gauss est basée, au fond, sur le lemme suivant ([2]), auquel on ne donne pas, d'habitude, une forme assez précise :

Si une fonction $\psi(x)$ jouit de cette propriété que, quelles que soient les quantités a, b, c, ..., au moins au nombre de trois, liées uniquement par la condition

$$a + b + c + \ldots = 0,$$

on ait, en même temps,

$$\psi(a) + \psi(b) + \psi(c) + \ldots = 0 ;$$

on aura

$$\psi(x) = \mathrm{K}x,$$

K étant une constante.

Si les quantités a, b,... n'étaient pas, au moins, au nombre de trois, la démonstration ne réussirait pas, comme il est facile de le voir.

Elle ne réussirait pas non plus si ces quantités étaient en

à $\varphi(x)$. Mais on ne se sert pas de cette propriété dans la recherche de la forme de la fonction φ. La démonstration réussit sans qu'on admette d'avance la propriété indiquée, à condition, bien entendu, que la forme $\varphi(x)$ soit applicable aux valeurs négatives de la variable. La démonstration réussirait encore si l'on supposait que, dans $\varphi(x)$, x ne représentât que la valeur absolue de l'erreur; ce qui est permis, d'après la définition des erreurs accidentelles.

([2]) Ouvrage cité, page 167.

nombre infini ; car alors on ne pourrait plus dire que les erreurs, ou plutôt les différences par rapport à la moyenne, soient liées uniquement par la condition exprimant que leur somme est nulle : en vertu de la définition des erreurs accidentelles, elles seraient liées *deux à deux* par une équation semblable.

Ainsi, on arrive à ce rapprochement curieux et qui me paraît de nature à faire admettre mes idées sur ces divers points (en les supposant nouvelles) :

Le principe de la moyenne est rigoureusement établi dans deux cas, c'est-à-dire lorsque le nombre des données est *infini* et lorsqu'il est égal à *deux*. La recherche de la forme normale de la probabilité des erreurs exige, au contraire, que le nombre de ces erreurs ne soit, ni infini, ni égal à deux. Le postulatum de la moyenne peut donc se démontrer, précisément dans les cas où il est inutile.

D. Enfin, la réduction indiquée est la dernière dont le problème soit susceptible, c'est à-dire qu'il est impossible de démontrer, par aucun moyen, le principe de la moyenne entre *trois* quantités, même en admettant l'existence d'une fonction analytique représentant la probabilité d'une erreur comprise entre 0 et x.

En effet, on pourrait imaginer que les erreurs commises par un observateur fussent produites, non par l'action des lois naturelles, mais par une autre personne qui amènerait ces erreurs dans les opérations de la première, à l'insu de celle-ci, en les combinant d'après une loi due à son propre caprice, loi régulière, bien entendu, mais différente de celle de Gauss, ou, si l'on veut, de celle de la nature. La fonction qui l'exprimerait pourrait être choisie, d'ailleurs, de manière à satisfaire à toutes les conditions que l'on peut exiger, *a priori*, de la loi des erreurs, et, en particulier, à la condition de donner, pour le cas de deux observations, un résultat d'autant moins rationnel que l'on s'écarte davantage d'une certaine valeur intermédiaire.

Ici, le postulatum de l'existence d'une fonction est vrai ; et si l'on pouvait tirer de là le principe général de la moyenne, ou

seulement le principe de la moyenne pour trois quantités, celui-ci, à son tour, conduirait, par la théorie de Gauss, à la forme

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2};$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Un raisonnement analogue montrerait, s'il en était besoin, qu'il est impossible de démontrer le principe d'après lequel la probabilité doit s'exprimer par une fonction analytique.

Il existe cependant une tentative de démonstration du postulatum de la moyenne pour trois quantités, due au célèbre astronome Encke [1]; mais elle suppose que la valeur la plus rationnelle d'une quantité dont on a les trois mesures

$$a, b, c,$$

doive nécessairement être la même que si l'on avait les trois mesures

$$\tfrac{1}{2}(a+b), \tfrac{1}{2}(a+b), c.$$

Cette hypothèse est, au fond, un postulatum nouveau, qui n'est nullement contenu dans le principe de la moyenne entre deux quantités.

III.

Dans la recherche de *l'erreur moyenne d'une moyenne* et de sa mesure de précision [2], il se présente une particularité sur laquelle je désire appeler l'attention. Je terminerai par là cette petite Note.

---

(1) *Berliner Astronomisches Jahrbuch* für 1834, p. 261.

Je ne parle pas de la démonstration donnée par Encke pour le cas de deux quantités, qui est moins satisfaisante encore. On y admet que l'hypothèse la plus rationnelle est alors celle de deux erreurs égales. *A priori*, on serait tenté de croire le contraire. Cependant le fait est vrai, mais seulement à cause de la loi de probabilité des erreurs, comme cela a été établi précédemment.

(2) *Conf. sur la Bal.*, pp. 182 et 183.

Si l'on connaissait, *a priori*, la probabilité que l'erreur sur la moyenne M, entre les n observations A_1, A_2, ..., dût être comprise entre a et $a + \Delta x$, on en déduirait, en faisant $a = 0$, la probabilité que cette erreur fût comprise entre 0 et $0+\Delta x$; calculant alors le rapport R de ces deux probabilités, la mesure de précision de la moyenne serait donnée par la formule connue

$$\mathrm{H} = \frac{1}{a}\sqrt{-l.\mathrm{R}}\,, \qquad (1)$$

et son erreur moyenne, par

$$\frac{1}{\mathrm{H}\sqrt{2}}\,.$$

Pour obtenir la probabilité que l'erreur de M soit comprise entre a et $a + \Delta x$, on cherche quelles seraient alors les erreurs sur les observations particulières ; et la probabilité de la coexistence de ces erreurs se trouve être

$$\frac{h^n \Delta x^n}{\sqrt{\pi^n}}\, e^{-h^2\,[(A_1 - M + a)^2 + (A_2 - M + a)^2 + \ldots]}$$

Ceci s'accorde avec la théorie ordinaire. Mais j'ajoute :

« C'est là aussi la probabilité que l'erreur de M soit comprise entre a et $a + \Delta x$, puisque ces deux événements sont connexes, l'un entraînant l'autre. »

Ce raisonnement, je le sais, n'est pas entièrement rigoureux. Les mesures de précision, les erreurs moyennes, les probabilités des erreurs, sont censées estimées avant les observations. Dès lors, A_1, A_2, ..., M sont des inconnues ; de plus, la probabilité d'une erreur comprise entre des limites données, dans la moyenne, doit être indépendante de A_1, A_2, ...

La seule excuse de ma théorie consiste en ce que A_1, A_2... disparaissent dans le résultat final. Je n'ai pu trouver de raison plus satisfaisante de ce fait important : les mesures de précision sont proportionnelles aux racines carrées des nombres d'observations.

Mais la théorie ordinaire me semble bien plus sujette à cau-

tion. L'explication que je donnais tout à l'heure y est remplacée par une autre, s'appuyant sur ce que les probabilités des hypothèses seraient *proportionnelles* aux probabilités que ces hypothèses donnent pour les événements observés.

D'abord, quel serait le coefficient de proportionnalité ? A chaque valeur de a correspond un seul système de valeurs de $A_1 - M + a$, etc.; car ici il s'agit d'événements observés, et A_1, ..., M sont déterminés ; de part et d'autre, la somme des probabilités doit être l'unité ; donc, au moins dans ce cas, les probabilités des hypothèses sont, non seulement proportionnelles, mais *égales* aux probabilités que ces hypothèses donnent pour les événements observés. Dès lors mieux vaut le dire, comme je l'ai fait, que de rester dans le vague.

Ensuite, puisqu'il s'agit toujours d'événements observés et déterminés, la probabilité de l'erreur, la mesure de précision et l'erreur moyenne que l'on calcule sont donc relatives à la moyenne connue M et non à une époque antérieure aux observations. Alors cette probabilité, cette mesure de précision, cette erreur moyenne n'auraient pas le même sens que celles d'une observation isolée, lesquelles représentent bien la probabilité, la mesure de précision, l'erreur moyenne *avant l'observation.*

En outre, de quel droit emploie-t-on, pour la détermination de cette mesure de précision *a posteriori*, si l'on peut s'exprimer ainsi, la formule (1), démontrée seulement pour les mesures de précision *a priori* ?

Il y a là une difficulté que je me borne à signaler, n'étant pas à même d'en donner une solution irréprochable.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS ;

d'après BALTZER ET SALMON.

(Suite. Voir p. 111.)

CHAPITRE II. CALCUL DES DÉTERMINANTS.

I.

Réduction des déterminants.

15. *Des mineurs*. Le coefficient d'un élément a_{ik} d'un déterminant $R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, est appelé le *mineur* de ce déterminant, par rapport à a_{ik} ; il est ordinairement représenté par A_{ik}, c'est-à-dire, comme l'élément a_{ik} lui même, sauf que la lettre minuscule a est remplacée par la majuscule correspondante, A.

1° *Détermination de* A_{11}. On trouve tous les termes de R qui contiennent a_{11}, en permutant, de toutes les manières possibles, les premiers ou les seconds indices dans le terme principal $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, en laissant toutefois a_{11} sans changement, et donnant un signe convenable à chacune des permutations ainsi trouvées. On trouve les mêmes permutations en calculant

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} ;$$

donc

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Ainsi, *le coefficient du premier terme d'un déterminant* R, *de* n^2 *éléments, est le déterminant de* $(n-1)^2$ *éléments, obtenu en supprimant, dans* R, *la première ligne et la première colonne.*

2° *Détermination de* A_{ik}. *Première Méthode.* Fesons venir a_{ik} à la première place dans R, en mettant la $i^{ème}$ ligne la première, au moyen de $(i-1)$ échanges de lignes deux à deux, et la $k^{ème}$ colonne, la première aussi, au moyen de $(k-1)$ échanges de colonnes. Nous aurons, d'après la règle précédente :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ainsi, *le coefficient* A_{ik} *d'un terme* a_{ik}, *dans un déterminant* R *de* n^2 *éléments, est le déterminant de* $(n-1)^2$ *éléments, obtenu en supprimant dans* R *la ligne* i *et la colonne* k, *qui se croisent en* a_{ik}, *ce déterminant étant multiplié par* $(-1)^{i+k}$.

Seconde méthode. On peut faire venir a_{ik} à la première place, au moyen de $(i-1)$ permutations circulaires de lignes et de $(k-1)$ permutations circulaires de colonnes. Chacune de ces permutations circulaires équivaut à $(n-1)$ échanges de lignes ou de colonnes. On trouve ainsi :

$$A_{ik} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i-1,k-1} \end{vmatrix}.$$

Selon que $(n-1)$ est pair ou impair

$$(-1)^{(n-1)(i+k)} = 1 \text{ ou } (-1)^{i+k}$$

La seconde méthode de détermination de A_{ik} est plus utile que l'autre dans les recherches théoriques.

Exercices. 1. Trouver le coefficient de a_{23} a_{41} dans $\Sigma \pm a_{11}$ $a_{22} \ldots a_{55}$; et celui de $a_{ik}\, a_{jl}$ dans $\Sigma \pm$ a_{11} ... a_{nn}, par permutation circulaire des lignes ou des colonnes ou non.

2. Dans un déterminant symétrique, c'est-à-dire où $a_{ik} = a_{ki}$, démontrer que $A_{ik} = A_{ki}$.

3. Dans un déterminant symétrique gauche, $A_{ik} = - A_{ki}$, $A_{ii}=0$, si le degré du déterminant est pair ; $A_{ik} = A_{ki}$, s'il est impair.

16. Première propriété des mineurs. *Expression d'un déterminant au moyen de ses mineurs.* Considérons les éléments a_{11}, a_{12}, ... a_{1n} de la première ligne d'un déterminant R. Les termes dont R est composé contiennent tous l'un ou l'autre de ces éléments et n'en contiennent qu'un seul. L'ensemble des termes qui contiennent a_{11} et a_{11} A_{11} ; l'ensemble des termes qui contiennent a_{12} est a_{12} A_{12}, et ainsi de suite. Donc

$$R = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}.$$

On a de même, pour les éléments de la première colonne, d'une ligne i, ou d'une colonne k quelconque :

$$R = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \cdots + a_{n1} A_{n1}$$
$$R = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$
$$R = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \cdots + a_{nk} A_{nk}$$

Exemples. I. Mineurs formés par la seconde méthode :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

II. Mineurs formés par la première méthode

$$a_1 b_2 c_3 d_4 = -b_1(a_2 c_3 d_4) + b_2(a_1 c_3 d_4) - b_3(a_1 c_2 d_4) + b_4(a_1 c_2 d_3).$$

Grâce à ce théorème, on peut calculer un déterminant quelconque, de proche en proche, au moyen de ses mineurs, des mineurs de ses mineurs, etc., sans se servir de la théorie des permutations.

Exercice. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & a' \\ c & 0 & a & b' \\ b & a & 0 & c' \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} = a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - 2aa'bb' - 2bb'cc' - 2cc'aa'.$$

17. Corollaires. I. *Si les éléments d'une ligne* i *(ou d'une colonne* k*) d'un déterminant* R *sont nuls, à l'exception d'un seul* a_{ik}, *le déterminant se réduit au produit* $a_{ik}\,A_{ik}$ *de cet élément par le mineur correspondant.* Par suite, *lorsque tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale s'évanouissent, le déterminant du système se réduit à son terme principal.* Ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

II. *Si les éléments d'une ligne* i *(ou d'une colonne* k*) d'un déterminant sont nuls, les éléments de la colonne* k *(ou de la ligne* i*) autres que* a_{ik}, n'entrant pas dans A_{ik}, *peuvent être remplacés par des éléments quelconques* ; en particulier, si on les remplace par zéro, on peut remplacer aussi les éléments de la ligne i (ou de la colomne k) par des éléments quelconques. Ainsi

$$\begin{vmatrix} m & n & p & q \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} m & n' & p' & q' \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ n'' & a_1 & b_1 & c_1 \\ p'' & a_2 & b_2 & c_2 \\ q'' & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

III. *Tout déterminant peut être mis sous forme d'un déterminant de degré plus élevé.* Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & m & n \\ q & 0 & a_1 & b_1 \\ r & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

En particulier, le mineur A_{ik} est égal au déterminant R, où a_{ik} est remplacé par 1, et les autres éléments de la ligne i ou de la colonne k sont remplacés par zéro.

Exercice. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ ou } 0$$

18. SECONDE PROPRIÉTÉ DES MINEURS. LEMME. *Le mineur* A_{ik} *d'un déterminant* R *ne change pas, si l'on remplace les éléments de la ligne* i *et de la colonne* k *par des éléments quelconques.* En effet, d'après la définition, A_{ik} ne contient aucun élément de cette ligne ou de cette colonne.

SECONDE PROPRIÉTÉ. *On a :*

$$a_{j1} A_{i1} + a_{j2} A_{i2} + \cdots + a_{jn} A_{in} = 0$$
$$a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = 0$$

si j *est un nombre compris dans la série* 1, 2, ... n, *et différent de* i *et de* k. En effet, la première de ces expressions est celle d'un déterminant dont la $i^{ème}$ ligne serait identique à la $j^{ème}$; la seconde, celle d'un déterminant dont la $k^{ème}$ colonne serait identique à la $j^{ème}$.

EXEMPLE. Soit $R = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3$. On aura, d'après les deux propriétés des mineurs,

$$\begin{array}{ll}
R = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 ; & R = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3. \\
0 = a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 ; & 0 = b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3. \\
0 = a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 ; & 0 = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3. \\
0 = a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 ; & 0 = a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3. \\
R = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 ; & R = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3. \\
0 = a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 ; & 0 = c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3. \\
0 = a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 ; & 0 = a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3. \\
0 = a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 ; & 0 = b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3. \\
R = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 ; & R = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3.
\end{array}$$

Exercices. 1. Soit $R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, $S = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$.

Formons, au moyen de S, de nouveaux déterminants S_i en remplaçant les $(n-1)$ premiers éléments de la première ligne verticale b_{11}, b_{21}, ... $b_{n-1,1}$, par a_{1i}, a_{2i}, ... $a_{n-1,i}$. Nous aurons identiquement,

$$A_{n1}S_1 + A_{n2}S_2 + \ldots + A_{nn}S_n = 0.$$

2. En particulier,

$$(b_1c_2)(a_1d_2) + (c_1a_2)(b_1d_2) + (a_1b_2)(c_1d_2) = 0.$$

(Baltzer, III, 11).

19. Propriété V. *On peut ajouter, aux éléments d'une ligne (colonne) d'un déterminant, respectivement les éléments d'une ou de plusieurs lignes (colonnes) parallèles, multipliés par des constantes quelconques, sans altérer le déterminant.* Ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 + mb_1 + nd_1, b_1, c_1, d_1 \\ a_2 + mb_2 + nd_2, b_2, c_2, d_2 \\ a_3 + mb_3 + nd_3, b_3, c_3, d_3 \\ a_4 + mb_4 + nd_4, b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, d_1 \\ a_2, b_2, c_2, d_2 \\ a_3, b_3, c_3, d_3 \\ a_4, b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix}$$

En effet, le premier de ces déterminants est égal à

$$(a_1+mb_1+nd_1)A_1+(a_2+mb_2+nd_2)A_2$$
$$+(a_3+mb_3+nd_3)A_3+(a_4+mb_4+nd_4)A_4.$$

Cette somme se compose de trois parties. D'après la première propriété des mineurs, une de ces parties, savoir :

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4,$$

est le second déterminant écrit ci-dessus. Les autres

$$m(b_1A_1 + b_2A_1 + b_3A_3 + b_4A_4),$$
$$n(d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 + d_4A_4)$$

sont nulles, d'après la seconde propriété des mineurs. Donc etc.

Cette propriété est d'une importance capitale dans le calcul des déterminants.

Exemples. I. On a successivement :

$$\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & -1, \\ -3, & -2, & 2, \\ 2, & 0, & 1, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & -1, & -1 \\ -7, & -2, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & -1 \\ -7, & -2 \end{vmatrix} = -15$$

Le second déterminant se déduit du premier en retranchant des éléments de la première, de la deuxième, de la troisième colonne, respectivement, 2, 3, 4 fois les éléments de la dernière. Le troisième déterminant se déduit du deuxième, en retranchant les éléments des trois premières colonnes de ceux de la dernière. « Toutes les fois que nous avons, comme dans le cas actuel, un déterminant dans lequel tous les éléments d'une même ligne sont égaux, nous pouvons en déduire, par soustraction, un autre déterminant dans lequel tous ceux d'une même ligne s'annulent, à l'exception d'un seul, et réduire ainsi le calcul à celui d'un déterminant d'ordre inférieur (SALMON). » Le reste du calcul est facile.

II. On a, en retranchant la dernière ligne des trois autres et divisant par $(a-d)\,(b-d)\,(c-d) = m$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1, & a+d, & a^3+a^2d+ad^2+d^3 \\ 1, & b+d, & b^3+b^2d+bd^2+d^3 \\ 1, & c+d, & c^3+c^2d+cd^2+d^3 \end{vmatrix}$$

De même, en retranchant la dernière ligne des autres, dans le second déterminant, on peut le diviser par $(a-c)\,(b-c)$. Enfin on trouve, *en représentant le déterminant primitif par sa première ligne* entre crochets

$$[1, a, a^2, a^4] = (a+b+c+d) \times \left\{ \begin{matrix} (a-d)\,(b-d)\,(c-d) \\ (a-c)\,(b-c) \\ (a-b) \end{matrix} \right\}$$

III. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 \\ \sin a, & & \sin b, & & \sin c \\ \cos a, & & \cos b, & & \cos c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin b - \sin a, & \sin c - \sin a \\ \cos b - \cos a, & \cos c - \cos a \end{vmatrix}$$

$$= 4 \sin \tfrac{1}{2}\,(a-b) \sin \tfrac{1}{2}\,(b-c) \sin \tfrac{1}{2}\,(c-a).$$

Exercices. 1. Démontrer la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

2. En employant la notation de l'exemple II et posant :

$$A = [a^6, a^3, a^2, a, 1], \quad B = [a^5, a^4, a^2, a, 1], \quad C = [a^4, a^3, a^2, a, 1],$$

démontrer que

$$4A-6B = C\{(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+\ldots+(d-e)^2\}$$

$$A-B = C(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$$ (*Cambridge Un. Ex. pap.* 1875).

3.
$$\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(a-b), & \cos\frac{1}{2}(b-c), & \cos\frac{1}{2}(c-a) \\ \cos\frac{1}{2}(a+b), & \cos\frac{1}{2}(b+c), & \cos\frac{1}{2}(c+a) \\ \sin\frac{1}{2}(a+b), & \sin\frac{1}{2}(b+c), & \sin\frac{1}{2}(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(c-a).$$

4. Si, dans un déterminant, la somme des carrés des éléments de chaque ligne est égale à l'unité, et qu'en outre la somme des produits des éléments correspondants de deux lignes quelconques parallèles soit nulle, les mêmes relations ont lieu entre les éléments des colonnes ; le déterminant est égal à ± 1, et chaque mineur est égal, en valeur absolue, à l'élément correspondant (N. A. 1870, p. 392).

(A continuer.) P. MANSION.

NOTE SUR LES ARCS DE COURBES SPHÉRIQUES;

par M. B. NIEWENGLOWSKI,

Professeur au Lycée de Reims.

Considérons une courbe plane quelconque et un point P situé à une distance h du plan de la courbe ; prenons, par rapport à P, l'inverse de cette courbe avec $2Rh$ pour puissance ; nous obtiendrons ainsi une courbe sphérique, tracée sur une sphère de rayon R. Si l'on change la puissance de transformation, ou,

ce qui revient au même, le rayon R, on obtiendra différentes courbes sphériques, homothétiques par rapport au point P. Soit O le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur le plan de la courbe donnée; transformons cette dernière par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle le point O, et pour puissance m^2. Les inverses sphériques de cette transformée et de la courbe donnée seront symétriques si $m^2 = h^2$. Ce résultat est démontré pour $R = h$ (*Annales de l'Ecole normale*, 2e série t. II p. 139); et ce qui précède fait voir que la proposition est indépendante de la valeur de R.

Cela posé, soient C une courbe plane, C′ son inverse par rapport à O, de puissance m^2. Soit C″ l'inverse de C′, obtenue en prenant pour puissance $m'^2 = h^2$. La courbe C″ est semblable à C; et l'inverse sphérique de C″ est symétrique de l'inverse sphérique de C′. Si s, σ sont les arcs de la courbe C et de sa projection sphérique S, et que s', σ' représentent les arcs des courbes C′ et S′, on a (Mémoire cité) :

$$ds = \frac{2h^2 d\sigma}{h^2+u^2}, \quad ds' = \frac{2h^2 d\sigma'}{h^2+u'^2}, \quad ds' = \frac{2m^2h^2 d\sigma}{m^4+h^2u^2};$$

u, u' désignant les rayons vecteurs des courbes C, C′. Mais, d'après ce qui a été dit plus haut, on peut se borner à faire $m^2 = h^2$; ou, si l'on prend $R = h = 1$, à ne considérer que la courbe S. Autrement dit, en se reportant aux notations du Mémoire, l'on peut faire $m=1$. Supposons que C soit une hyperbole ayant son centre en O. On aura (p. 146 du Mémoire) :

$$(1) \qquad ds' = -\frac{2mk}{a} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi} d\varphi.$$

Dans cette équation :

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \quad n = \frac{m^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{b\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2-a^2\sin^2\theta}}.$$

Ainsi s sera exprimé, en fonction de θ, par l'intégrale ellip-

tique de troisième espèce. C'est à ce résultat qu'est parvenu M. W. Roberts dans son Mémoire : *Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques* (*Journal de Liouville*, 1844).

M. Roberts considère l'intersection de la sphère et du cône représentés par

$$x^2+y^2+z^2=1,$$
$$x^2-y^2\mathrm{tg}^2\beta-(1-z)^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha=0.$$

Or cette intersection est précisément l'inverse sphérique de l'hyperbole ayant pour équations :

$$z=0, x^2-y^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta=\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

Si $\alpha=\beta$, l'arc est exprimable par une intégrale de deuxième espèce, et par une intégrale de première espèce, si $\mathrm{tg}\,\beta=\sin\alpha$.

Ces deux résultats peuvent se déduire facilement de nos formules.

Si, dans la formule (1), on fait $m^2=b^2$, on aura $n=0$; et, par suite

$$ds'=-\frac{2bk}{a}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

ou

$$s'=\frac{2bk}{a}\,\mathrm{E}\,(k,\varphi).$$

Pour $b=1$, $m=1$, on a le résultat même de M. Roberts. Si l'on fait $m=\sqrt{b^2-a^2}$, on a (Mém. cité, p. 147) :

$$s'=2\sqrt{-\cos 2\alpha}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi}}.$$

Si $b^2-a^2=1$, cette formule coïncide avec celle de M. Roberts :

$$s=2\sqrt{\cos 2\beta}\,\mathrm{F}\,(\sin\beta,\varphi);$$

2β désignant ici le supplément de l'angle des asymptotes. On voit qu'en faisant varier l'hyperbole, de manière qu'elle reste semblable à elle-même, l'arc de sa projection sur la sphère peut être exprimé par une intégrale de chacune des trois espèces.

On peut démontrer directement que la dernière courbe sphérique considérée est bien la lemniscate sphérique représentée par

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha . \sin \tfrac{1}{2} \beta = \sin^2 \tfrac{1}{2} \gamma,$$

α et β étant les deux côtés d'un triangle sphérique dont la base fixe est 2γ (*Journal de Liouville* 1844, p. 263). Si m est un point de la courbe sphérique, et si f, f' sont les projections des foyers F, F' de l'hyperbole, on a

$$mf . mf' = \mathrm{P}f^2 \frac{\mathrm{MF.MF'}}{\mathrm{PM}^2} .$$

Mais, à cause de $b^2 - a^2 = \mathrm{OP}^2$, on a aussi $\mathrm{PM}^2 = \mathrm{MF.MF'}$, M étant le point de l'hyperbole qui a pour projection m ; donc :

$$mf . mf' = \mathrm{P}f^2 .$$

Cette démonstration m'a été indiquée par M. Allégret.

J'ajouterai encore un mot. M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse* (t. 1er, p. 421), considère l'intersection des cylindres représentés par

(2) $\qquad y^2 + a^2 x^2 - 2ax = 0, \qquad z^2 - b^2 x^2 + 2bx = 0,$

avec la condition $a^2 - b^2 = 1$; et donne, pour l'arc s de cette courbe, la formule

$$s = \int \frac{\sqrt{2(a-b)}}{\sqrt{x(2-ax)(2-bx)}} dx .$$

Ces courbes ne diffèrent pas de celles de M. William Roberts. En effet, on déduit immédiatement, des équations (2) :

(3) $[x-(a-b)]^2 + y^2 + z^2 = (a-b)^2$, $\quad$ (4) $by^2 + az^2 + ab(a-b)x^2 = 0$,

lesquelles représentent une sphère et un cône du second degré ayant son sommet sur la sphère. Si l'on suppose $x = a - b$, on trouve

$$by^2 + az^2 + ab(a-b)^3 = 0 .$$

Or, à cause de $a^2 - b^2 = 1$, les expressions

$$a(b-a)^3, \quad b(b-a)^3,$$

qu'on peut écrire :

$$(ab - a^2)(a-b)^2, \quad (b^2 - ab)(a-b)^2$$

ne peuvent être de même signe. La courbe est donc une hyperbole. Si A, B désignent les demi-axes de cette hyperbole, on a $\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2 = (a-b)^2$; donc l'intersection des cylindres (2) est une lemniscate sphérique.

EXTRAITS ANALYTIQUES.

—

XIV.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

1. On peut toujours déterminer deux quantités h et k, de manière qu'entre les racines des équations

$$x^3+px+q=0\,,\qquad\qquad y^3=\frac{h}{k}\,,\qquad (1)$$

on ait la relation

$$y=\frac{x+h}{x+k}.\qquad (2)$$

On trouve, en effet, pour déterminer ces auxiliaires, les conditions

$$3hk=-p,\quad h+k=\frac{3q}{p};$$

d'où l'on tire aisément h et k.

2. En éliminant h entre les équations (1), (2), on trouve

$$x=ky\,(y+1).$$

Comme k est connu, et que y peut se déduire de l'équation (1), on a donc aussi la valeur de x. La discussion des résultats se fait comme d'ordinaire (Amanzio, *Giornale di matematiche*, t. 12, p. 89-92). (P. M)

—

XV.

ÉQUATION DES CONIQUES, EN COORDONNÉES POLAIRES.

Faisons

$$x=\mp c-u\cos\omega,\quad y=u\sin\omega$$

dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\,;\qquad (1)$$

elle deviendra, si $c^2 = a^2 \mp b^2 = a^2e^2$, $b^2 = ap$:

$$\left(u - \frac{p}{1+e\cos\omega}\right)\left(u - \frac{-p}{1-e\cos\omega}\right)=0. \qquad (2)$$

Les équations (1), (2), sont respectivement celles de l'ellipse ou de l'hyperbole, en coordonnées rectangulaires et en coordonnées polaires. La méthode donnée ici, pour passer de l'une à l'autre, s'appuie sur les principes généraux de la Géométrie analytique, plus directement que celle qui est employée par la plupart des auteurs (Lefébure, Falisse, Salmon, Carnoy). On peut faire une remarque analogue sur la parabole (Extrait d'une note de M. C. B).

—

XVI.

SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS.

Soient M_1, M_2, M_3 *les milieux des côtés du triangle* ABC, H_1, H_2, H_3 *les pieds des hauteurs de ce triangle, et* N_1, N_2, N_3 *les points d'intersection des droites* (M_2M_3, H_2H_3), (M_3M_1, H_3H_1), (M_1M_2, H_1H_2). *Démontrer que le centre du cercle des neuf points, de* ABC, *est le point de concours des hauteurs du triangle* $N_1N_2N_3$ (Brocard, *Nouvelles Annales*, 1874, p. 208).

La démonstration suivante nous a été suggérée par celle qui a paru dans les *Nouvelles Annales*, 1875, p. 130.

Il suffit de faire voir que le triangle $N_1N_2N_3$ est conjugué, par rapport au cercle des neuf points, de ABC.

Désignons par P le point de rencontre des droites BC_1, N_2N_3. Les deux faisceaux harmoniques (H_1B, H_1A, H_1H_3, H_1H_2), (M_1B, M_1A, M_1M_3, M_1M_2), ayant un rayon commun M_1H_1, les autres rayons se coupent deux à deux sur une même droite ; donc N_2N_3 passe par A, et les points P, A, N_2, N_3 forment une division harmonique. Il en résulte que le faisceau C(B, A, N_2, N_3) partage harmoniquement les droites M_1M_2, H_1H_2, qui sont deux cordes du cercle des neuf points ; par conséquent CN_2 est la polaire du point N_3, etc.

Remarque. Le triangle $N_1N_2N_3$ est circonscrit au triangle

donné ABC; les points d'intersection des droites (M_2H_3, M_3H_2), (M_3H_1, M_1H_3), (M_1H_2, M_2H_1) sont en ligne droite avec le centre de gravité et le point de rencontre des hauteurs, et sont situés sur les côtés du triangle $N_1N_2N_3$ [1].

J. N.

—

XVII.

SUR UNE CONIQUE.

Deux sommets A, B *d'un triangle* ABC *sont fixes, et le pied* D *de la bissectrice de l'angle* A *parcourt une droite donnée* MN ; *trouver le lieu du sommet* C.

Cette question, dont les *Nouvelles Annales* (1875, p. 141) ont donné une solution analytique, peut être résolue très-simplement comme il suit :

Menons les droites BE, CH perpendiculaires sur MN. On a

$$\frac{CH}{BE} = \frac{DC}{DB}, \quad \frac{CA}{BA} = \frac{DC}{DB};$$

d'où

$$\frac{CA}{CH} = \frac{BA}{BE}.$$

Par conséquent, *le lieu du point* C *est la conique ayant pour foyer le point* A, *pour directrice la droite* MN, *et passant par* B.

J. N.

NOTES SUR DIVERS ARTICLES DE LA NOUVELLE CORRESPONDANCE.

1. *Question* 1 (p. 63). Il y a une solution, de cette question, plus simple que celles que nous avons données. Elle repose sur la considération du losange dont les sommets sont les points milieux des diagonales et des côtés inégaux du quadrilatère

---

(1) Grâce aux recherches de MM. Hart, Casey, Hamilton, Hopps, ... , la circonférence des neuf points pourrait être appelée : *circonférence des* n *points*, *n* désignant un nombre *indéfiniment grand* (E. C).

(MM. Neuberg et Charlier). Nous avons reçu une solution de la même question, par M. Van Aubel, professeur à l'Athénée d'Anvers.

2. *Question* 3 (p. 63-64). Nous avons oublié de mentionner, parmi ceux qui nous ont envoyé une solution de cette question, MM. P. S., *abonné*, Ledent, professeur à l'école industrielle et littéraire de Verviers, et Van Aubel. M. P. S. démontre que les droites menées par les sommets d'un triangle, perpendiculairement aux bissectrices, forment un nouveau triangle, qui est le seul dont les sommets soient sur les bissectrices du premier. M. Ledent donne une démonstration qui pourrait facilement servir à prouver un théorème plus général. Elle repose sur les deux théorèmes fondamentaux de la théorie des transversales.

3. *Questions* 4 *et* 5 (p. 31-32, 64). Nous avons reçu une solution analytique de ces deux questions, due à M. le professeur Hioux. M. Neuberg observe que l'on peut déduire le théorème énoncé dans la question 4, de la remarque suivante : Si deux surfaces du second degré ont une section plane commune, tout plan parallèle à cette section les coupe suivant deux coniques semblables. Or l'ellipsoïde et le cône visuel se coupent suivant deux courbes planes, dont l'une est la conique projetée et l'autre une section infiniment petite, située dans le plan tangent au point de vue.

4. *Question* 6 (p. 32). Nous n'avons inséré cette question, avec la réponse en note, que comme curiosité bibliographique.

5. *Question* 13 (p. 92). Nous avons reçu, depuit longtemps, une solution de cette question, accompagnée de l'énoncé suivant :

Dans le système décimal, le nombre (6a) (6b) (13c) abc *est toujours divisible par* 17.

Il est facile de vérifier l'*inexactitude* de ce petit théorème.

6. *Question* 18 (p. 67). M. Neuberg observe que le triangle dont il s'agit a pour mesure $\left(\frac{r}{2R}\right)^2 T$, r et R étant, respectivement, les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit.

7. *Question* 26 (p. 67). MM. Neuberg, Brocard, Médulfus, Laisant nous font observer, avec raison, que la condition *p premier à n* est surabondante. M. P. S. formule ainsi la même remarque : *cette clause est ce qu'on appelle un* (sic) *cheville.*

8. Un abonné nous demande la signification des lettres qui suivent le nom de M. le professeur Glaisher (p. 73). La voici : *Magister Artium, Fellow of the Royal Astronomical Society.*

9. *Extraits analytiques*, n° IX (p. 83). Des calculs analogues à celui de M. Simony se trouvent dans beaucoup de traités d'Algèbre.

10. *Extraits analytiques*, n° X (p. 84). M. Neuberg nous fait remarquer que, dès 1868, M. Dyrion a écrit, sur les développées, un article analogue à celui de M. Nicolaïdès. Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de cette année, p. 176.

11. *Extraits analytiques*, n° XII (p. 87). La construction des racines réelles d'une équation du quatrième degré, au moyen d'une parabole fixe, est indiquée dans le *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, tome I, p. 489.

12. *Erratum.* Lire $\overline{AB}$, au lieu de $-AB$, p. 99, ligne 1.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LA NOUVELLE CORRESPONDANCE.

Questions 19 et 20.

19. *Les médianes d'un triangle forment, avec les côtés qu'elles divisent en deux parties égales, des angles dont les cotangentes ont une somme nulle.* (BERMANN.)

20. *Si l'on abaisse, d'un point* O, *les perpendiculaires* OD, OE, OF, *sur les côtés du triangle* ABC, *on a* :

$$\cot ADC + \cot BEA + \cot CFB = 0.$$

(BRETSCHNEIDER.)

I. La première de ces questions est un cas particulier de la seconde. Il est facile d'en donner une démonstration directe, comme il suit :

Abaissons, du point A, la perpendiculaire $AG = h$ sur BC.

Appelons a, b, c, T les côtés et l'aire du triangle ABC, c' et b', les segments BG, GC de BC. Nous aurons

$$\cot \mathrm{ADC} = \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{AG}} = \frac{\frac{a}{2} - b'}{h} = \frac{\left(\frac{b'+c'}{2} - b'\right)(b'+c')}{ah}$$

$$= \frac{(c'-b')(b'+c')}{4\mathrm{T}} = \frac{c'^2 - b'^2}{4\mathrm{T}} = \frac{(c'^2+h^2)-(b'^2+h^2)}{4\mathrm{T}}.$$

Donc :

$$\cot \mathrm{ADC} = \frac{c^2-b^2}{4\mathrm{T}}\ ;\ \cot \mathrm{BEA} = \frac{a^2-c^2}{4\mathrm{T}}\ ;\ \cot \mathrm{CFB} = \frac{b^2-a^2}{4\mathrm{T}}\ ;$$

etc.

II. Dans le cas général, on a de même :

$$\cot \mathrm{ADC} = \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{DG}.a}{2\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{DG}(\mathrm{BD}+\mathrm{DC})}{2\mathrm{T}}.$$

Mais

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2 + 2\mathrm{DG}.\mathrm{BD},$$
$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{DC}}^2 - 2\mathrm{DG}.\mathrm{DC}\ ;$$

donc

$$2\mathrm{DG}\,(\mathrm{BD}+\mathrm{DC}) = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 - (\overline{\mathrm{BD}}^2 - \overline{\mathrm{CD}}^2).$$

Par suite :

$$\cot \mathrm{ADC} = \frac{c^2-b^2-(\overline{\mathrm{BD}}^2-\overline{\mathrm{CD}}^2)}{4\mathrm{T}},$$

$$\cot \mathrm{BEA} = \frac{a^2-c^2-(\overline{\mathrm{CE}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2)}{4\mathrm{T}},$$

$$\cot \mathrm{CFB} = \frac{b^2-a^2-(\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{BF}}^2)}{4\mathrm{T}}\ ;$$

puis

$$\cot \mathrm{BDC} + \cot \mathrm{BEA} + \cot \mathrm{CFB} =$$
$$\overline{\mathrm{AF}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2 + \overline{\mathrm{CE}}^2 - (\overline{\mathrm{BF}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2).$$

Le second membre est nul ; car si l'on y ajoute et si l'on en retranche

$$\overline{\mathrm{OD}}^2 + \overline{\mathrm{OE}}^2 + \overline{\mathrm{OF}}^2,$$

on trouve

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - (\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2).$$

Le théorème est donc démontré.

Note. La solution précédente est celle de M. Bermann (*Archives de Grunert*, t. 56, p. 109). M. O. Charlier nous a envoyé une solution identique, aux notations près. Nous en avons également reçu, de MM. Médulfus, Van Aubel, P. S., Ledent, Cambier, Seron, élève à l'Ecole des Mines (Liége).

—

Question 21.

Soit un triangle ABC. *Par* A, *menons* AD *coupant* BC *en* D ; *par* D, DE *parallèle à* AB, *coupant* AC *en* E ; *par* E, EF *parallèle à* BC, *coupant* AD *en* M. *Le lieu du point* M, *quand* AD *se déplace, est une parabole passant par* C, *tangente en* A *à* AB *et dont l'axe est parallèle à* BC.

Prenons un point I sur une parallèle AI à BC, et cherchons d'abord le lieu du point m intersection de IE avec AD. Menons, par I, la droite Ib parallèle à AB et rencontrant la droite BC en b, puis Ic parallèle à AC.

On trouve, sans peine, que le lieu du point m passe par A, C, b, I, qu'il est tangent à AB et Ic, de sorte que AI est la corde de contact. Ce lieu est une conique, parce qu'il est coupé en deux points seulement par chaque droite AD ou Im.

Si le point I se transporte à l'infini, la tangente Ic se transporte aussi à l'infini: la courbe devient une parabole ayant pour diamètre la corde de contact (Salmon, *Coniques*, n° 254).

Note. Cette solution est à peu près celle de M. Silldorf (*Arch. de Grunert*, t. 56, p. 107). Autres solutions de MM. O. Charlier, Médulfus, Derousseaux, Seron. M. le Capitaine Laisant résout la question par la méthode des *équipollences*.

—

Question 28.

Construire un triangle ABC *connaissant les angles et la relation*

$$a.\ BC + b.\ CA + c.\ AB = k^2 :$$

a, b, c, k *sont des longueurs données* (J. N)

Du point O, pris à l'intérieur du triangle ABC, abaissons, sur les côtés BC, CA, AB, des perpendiculaires, sur lesquelles nous prendrons $OD' = a$, $OE' = b$, $OF' = c$; par les points D′, E′, F′, menons les droites B′C′, C′A′, A′B′ parallèles à BC, CA, AB. Les triangles semblables ABC, A′B′C′ donnent :

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{a.BC+b.CA+c.AB}{a.B'C'+b.C'A'+c.A'B'} = \frac{k^2}{2A'B'C'}.$$

Le triangle A′B′C′ étant construit, les proportions précédentes feront connaître les trois côtés du triangle cherché.

O. Charlier.

Note. Même solution de M. Médulfus. Autre par M. Barzin, régent à l'École moyenne d'Andenne, analogue à la solution suivante de la question 29.

—

Question 29.

Construire un triangle ABC, *connaissant un angle, le côté* BC, *et l'une des relations*

$$c.\ AB \pm b.\ AC = k^2. \qquad \text{(J. N)}$$

Divisant les deux membres par c et faisant $k^2 = cm$, on a

$$AB + \frac{b}{c}\ AC = m, \quad AB - \frac{b}{c}\ AC = m.$$

Il suffira de considérer la première de ces égalités.

1° Soit B l'angle donné. Si l'on construit, avec les données B, BC et $BD = m$, le triangle BDC, il restera à trouver, sur BD, un point A tel que l'on ait $AD = \frac{b}{c}$ AC. A cet effet, prenons sur DB une longueur $DI = b$; la circonférence (I, c), c'est-à-dire ayant pour centre I et pour rayon c coupant DC en H, menons CA parallèle à HI ; et le problème sera résolu.

2° Soit A l'angle donné. Sur BC décrivons un arc, capable de cet angle. D'un point quelconque A′ de cet arc, tirons A′B, A′C. Prolongeons BA′ de $A'I = b$; prenons, sur A′C la longueur $A'H = c$; puis menons, par C, une parallèle à HI, rencontrant BA′ en D′. Soit D le point d'intersection des circon-

férences (B, m) et BD′C. La droite BD coupera l'arc BA′C en un point A, et ABC sera le triangle demandé. En effet, on a

$$\frac{AD}{AC} = \frac{b}{c};$$

à cause des triangles équiangles DAC, IA′H, etc. (*Extrait de la solution de* M. J. B. Barzin).

Note. Autre solution de M. O. Charlier, analogue à celle de la question 28, insérée ci-dessus. M. Médulfus construit, sur les côtés AB, CA, BC, des rectangles ou des parallélogrammes équivalents à c.AB, b.CA, k^2. De la figure ainsi obtenue, on déduit aisément la solution.

ESQUISSES BIOGRAPHIQUES.

I.

W. J. M. RANKINE.

Rankine (William John Macquorn), né à Edimbourg, le 5 juillet 1820, fit ses études dans sa ville natale et devint ensuite ingénieur civil. Il obtint, en 1854, la médaille de Heit de la Société Royale des Sciences d'Edimbourg, pour ses travaux sur la Thermodynamique; fut nommé, en 1855, professeur de Mécanique et de constructions civiles à l'Université de Glascow, et mourut dans cette ville, le 24 décembre 1872.

Rankine a écrit un grand nombre de mémoires contenant des recherches originales, principalement sur la théorie mécanique de la Chaleur et sur ses applications aux machines thermiques. Il est, avec Clausius, le fondateur de la vraie théorie des vapeurs. Son principal mémoire sur la Thermodynamique, présenté à la Société Royale de Londres en 1853, est intitulé : *On the geometrical Representation of the expansive action of heat, and the Theory of Thermo-Engine* (Phil. Transactions, t. 144 ; 1854). Dans ses écrits sur la Chaleur, Rankine s'appuie sur une hypothèse particulière relative au mouvement moléculaire, qui, tantôt l'a conduit à des résultats nouveaux et exacts, tantôt à des erreurs, au dire de Clausius.

Rankine a publié un cours complet de Mécanique appliquée, universellement estimé. Nous croyons utile de donner ici le titre des Manuels qui composent ce cours :

I. *A Manual of applied mechanics*. London, Griffin, 6th edition, 1872 ; 664 p. in-12 (Prix : 12 shillings 6 den.)

II. *A Manual of the Steam Engine and other prime movers*. Ibid., 6th ed. 1873 ; 608 p. in-12 (Prix : 12 sh. 6 d.)

III. *A Manual of civil Engineering*. Ibid., 9th ed. 1873; 800 p. in-12 (Prix : 16 sh.).

IV. *Useful rules and tables relating the mensuration, engineering, structures and machines*. Ibid. 4th ed. 1873; 320 p. in-12 (Prix : 9 sh.).

V. *A Manual of Machinery and Mill-Work*. Ibid. 1869; 604 p. in-12 (Prix : 12 sh. 6 d.).

VI. *Shipbuilding theoretical and practical*. London, Mackenzie, 1866. 312 p. et 54 pl. (En collaboration avec Is. Watts, Fred. Barnes, ingénieurs de la Marine, et I. R. Napier, constructeur de navires).

Le *Manuel de Mécanique appliquée* est précédé d'une remarquable dissertation sur l'harmonie qui doit exister entre la Mécanique rationnelle et la Mécanique appliquée, pour qu'elles fassent toutes deux les progrès dont elles sont susceptibles. On y trouve cette assertion, qui étonnera certainement plus d'un admirateur de l'Angleterre: « Notre pays ne manque certes pas d'hommes éminents, connaissant parfaitement les matériaux, le travail à faire pour les mettre en œuvre, et sachant en diriger l'exécution dans les moindres détails ; bref, ayant à un haut degré ce genre d'habileté que l'on acquiert par la pratique seule. Mais, de cette habileté, à la fois théorique et pratique, qui consiste à exécuter une œuvre avec la moindre dépense possible de matériaux et de travail, les exemples sont comparativement rares et exceptionnels. »

M. Mariano Quercia a publié une Notice sur la vie et les écrits de Rankine, où sont analysés avec soin ses principaux ouvrages (*Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. 7, p. 1-61; janvier et février 1874). P. M.

QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

I.

TROUVER DES SOLUTIONS ENTIÈRES DE L'ÉQUATION

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On peut écrire

$$x^2 = (z+y)(z-y),$$

et, par suite, poser

$$z+y = \frac{px}{q}, \quad z-y = \frac{qx}{p},$$

p et q étant deux indéterminées. On tire de là :

$$z = \frac{(p^2+q^2)x}{2pq}, \quad y = \frac{(p^2-q^2)x}{2pq}.$$

Pour avoir des solutions entières, nous ferons

$$x = 2pq, \quad y = p^2-q^2, \quad z = p^2+q^2. \qquad (1)$$

REMARQUE. — On obtient les mêmes valeurs en posant

$$x = z \sin\varphi = z\,\frac{2\ \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}, \; y = z\cos\varphi = z\,\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{q}{p}.$$

II.

TROUVER DES SOLUTIONS ENTIÈRES DE L'ÉQUATION

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

En écrivant

$$(x+iy)(x-iy) = (u+z)(u-z), \quad (i=\sqrt{-1})$$

on voit qu'on peut poser

$$x+iy = (u-z)(p+iq), \; (x-iy)(p+iq) = u+z,$$

p et q étant deux indéterminées. Ces égalités se décomposent en

$$x = (u-z)\,p,\ \ y = (u-z)\,q,$$
$$px + qy = u + z,\ \ qx - py = 0.$$

Par conséquent :

$$z = u\frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1},\ x = u\,\frac{2p}{p^2+q^2+1},\ y = u\,\frac{2q}{p^2+q^2+1}.$$

Remplaçant p par $\frac{X}{Z}$, q par $\frac{Y}{Z}$, on obtient, pour les solutions entières de l'équation proposée :

$$u = X^2+Y^2+Z^2,\ x = 2XZ,\ y = 2YZ,\ z = X^2+Y^2-Z^2.$$

L'identité que nous venons de trouver, savoir :

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2 = (2XZ)^2 + (2YZ)^2 + (X^2+Y^2-Z^2)^2, \quad (2)$$

montre que, *si un nombre est une somme de trois carrés, son carré est également une somme de trois carrés*. Cette proposition a été récemment signalée par M. Catalan (*Nouvelles Annales*, 1874, p. 111). [1]

III.

Prendre, sur les arêtes d'un trièdre trirectangle, trois longueurs OA, OB, OC, en nombres entiers, telles que l'aire du triangle ABC soit un nombre entier (*Nouvelles Annales*, 1874, p. 340).

Faisons

$$OA = x,\quad OB = y,\quad OC = z,\quad ABC = u.$$

Un théorème connu donne

$$\overline{ABC}^2 = \overline{OBC}^2 + \overline{OCA}^2 + \overline{OAB}^2\,;$$

d'où

$$\left(\frac{2u}{xyz}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

---

[1] Voir également *Nouvelle Correspondance*, p. 134.

L'identité (2) conduit à poser :

$$\frac{1}{x} = \frac{2YZ}{K}, \frac{1}{y} = \frac{2XZ}{K}, \frac{1}{z} = \frac{X^2+Y^2-Z^2}{K},$$

$$\frac{2u}{xyz} = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{K};$$

par conséquent :

$$x = \frac{K}{2YZ}, y = \frac{K}{2XZ}, z = \frac{K}{X^2+Y^2-Z^2},$$

$$u = \frac{K^2(X^2+Y^2+Z^2)}{8XYZ^2(X^2+Y^2-Z^2)}.$$

Pour avoir des solutions entières, faisons

$$K = 4XYZ\,(X^2+Y^2-Z^2);$$

alors

$$x = 2X\,(X^2+Y^2-Z^2),\ y = 2Y\,(X^2+Y^2-Z^2),\ z = 4XYZ,$$
$$u = 2XY\,(X^2+Y^2-Z^2)\,(X^2+Y^2+Z^2).$$

IV.

TROUVER DEUX NOMBRES RATIONNELS TELS, QUE LEUR SOMME SOIT ÉGALE A CELLE DE LEURS CUBES.

L'équation de ce problème revient à

$$x^2-xy+y^2 = 1,$$

ou

$$x(x-y) = (1+y)\,(1-y).$$

Elle est vérifiée quand on pose :

$$x = (1+y)\,t,\ \ (x-y)\,t = 1-y,$$

t étant une indéterminée. On en conclut

$$x = \frac{2t-t^2}{1-t+t^2}, y = \frac{1-t^2}{1-t+t^2}.$$

On trouve, de la même manière, pour les solutions entières de l'équation

$$x^2-xy+y^2 = z^2:$$

$$x = 2pq - q^2,\ y = p^2 - q^2,\ z = p^2 - pq + q^2. \qquad (3)$$

Pour résoudre cette équation, on peut aussi mettre le premier membre sous la forme d'une somme de deux carrés, en écrivant, par exemple,

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 = z^2,$$

et poser, d'après les formules (1) :

$$z = \alpha^2 + \beta'^2,\quad x - \frac{y}{2} = \alpha^2 - \beta'^2,\ \frac{y\sqrt{3}}{2} = 2\alpha\beta'.$$

On obtient des valeurs rationnelles en faisant $\beta' = \beta\sqrt{3}$; d'où

$$z = \alpha^2 + 3\beta^2,\ x = \alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2,\ y = 4\alpha\beta. \qquad (4)$$

Les formules (3) et (4) se ramènent les unes aux autres par les substitutions

$$p + q = 2\alpha,\ p - q = 2\beta.$$

V.

Trouver, en nombres entiers, les côtés d'un triangle, sachant que le cosinus de l'un des angles est égal a la fraction $\frac{p}{q}$ (*Nouvelles Annales* [1], 1874, p. 296).

x, y, z représentant les côtés du triangle, on doit avoir

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\frac{p}{q},$$

ou

$$(x+y)(x-y) = z\left(z - 2y\frac{p}{q}\right).$$

Posons :

$$x + y = zt,\ (x-y)t = z - 2y\frac{p}{q};$$

[1] La solution qu'on y lit est peut-être moins simple que la nôtre. Même observation pour le Problème VI.

d'où

$$x = z\,\frac{2pt - q(1+t^2)}{2(p-qt)},\quad y = z\,\frac{q(1-t^2)}{2(p-qt)}.$$

Pour avoir des valeurs entières de x, y, z, nous remplacerons d'abord t par $\frac{\beta}{\alpha}$; et nous prendrons ensuite :

$$z = 2\,(p\alpha^2 - q\alpha\beta),$$
$$x = 2p\alpha\beta - q(\alpha^2+\beta^2),$$
$$y = q\,(\alpha^2 - \beta^2).$$

VI.

Trouver un tétraèdre ayant un trièdre trirectangle, et dont les six arêtes soient mesurées par des nombres entiers (*Nouvelles Annales*, 1874, p. 289).

Soient x, y, z les arêtes du trièdre trirectangle, et X, Y, Z les autres arêtes. On a les équations

$$x^2+y^2 = Z^2,\ y^2+z^2 = X^2,\ z^2+x^2 = Y^2,$$

qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers. La première peut s'écrire

$$x^2 = (Z+y)\,(Z-y).$$

Pour en avoir des solutions *rationnelles*, nous posons, α étant une indéterminée :

$$Z+y = \alpha x,\quad Z-y = \frac{x}{\alpha}\,;$$

d'où

$$y = \frac{x}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right),\ Z = \frac{x}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right). \tag{5}$$

L'équation $x^2+z^2=Y^2$, traitée de la même manière, donne

$$z = \frac{x}{2}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right),\ \ Y = \frac{x}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right), \tag{6}$$

β étant une nouvelle indéterminée.

Reste à satisfaire, par des nombres rationnels, à l'équation

$$y^2+z^2 = X^2,$$

ou

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{4X^2}{x^2},$$

qui, étant développée, devient

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{4X^2}{x^2}.$$

Elle est vérifiée quand on pose :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4,\ X^2 = \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{x^2}{\alpha^2\beta^2}. \qquad (7)$$

La première des égalités (7) admet les valeurs

$$\alpha = \frac{4t}{1+t^2},\ \beta = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}, \qquad (8)$$

où t est une indéterminée, et la seconde revient à

$$X = \frac{x}{\alpha\beta} = x\frac{(1+t^2)^2}{8t(1-t^2)}. \qquad (9)$$

Remplaçons t par $\frac{q}{p}$; substituons les valeurs (8) dans les formules (5) et (6) ; et égalons x au dénominateur commun des fractions qui entrent dans les expressions de y, z, X, Y, Z ; nous aurons alors :

$$\begin{aligned}
x &= 8pq\,(p^4 - q^4),\\
y &= (p^2 - q^2)\,[(p^2+q^2)^2 - 16p^2q^2],\\
z &= 2pq\,[(p^2+q^2)^2 - 4(p^2-q^2)^2],\\
X &= (p^2+q^2)^3,\\
Y &= 2pq\,[(p^2+q^2)^2 + 4(p^2-q^2)^2],\\
Z &= (p^2-q^2)\,[(p^2+q^2)^2 + 16p^2q^2].
\end{aligned}$$

Les nombres p, q sont indéterminés, mais ils ne peuvent être égaux. Si l'on fait $p = 2$, $q = 1$, on a la solution

$$x = 240,\quad y = 117,\quad z = 44,$$
$$X = 125,\quad Y = 244,\quad Z = 267.$$

Remarque. — Le problème précédent dépend d'une équation de la forme

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = u^2, \qquad (10)$$

où α, β, u doivent être rationnels. Comme nous avons posé

$$\alpha^2+\beta^2 = 4, \quad Z+y = \alpha x, \quad Y+z = \beta x,$$

les formules trouvées établissent, entre les arêtes du tétraèdre, cette nouvelle relation

$$(Z+y)^2 + (Y+z)^2 = 4x^2\,;$$

par conséquent, elles ne donnent pas toutes les solutions possibles.

Pour résoudre l'équation (10), Euler [1] emploie les deux substitutions

$$\alpha = t(\beta-1) + 1, \quad \alpha = \frac{t\beta+1}{t+\beta},$$

t étant une indéterminée ; puis il ramène la question à rendre carré parfait un polynôme du quatrième degré en β.

J. Neuberg.

SUR LES ASYMPTOTES DES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. Lemme. Soit F (x, λ) = 0 *une équation algébrique, du degré* m *par rapport à* x. *Soit, pour* $\lambda = \alpha$, n *le nombre des racines réelles :* m — n *est un nombre pair.*

En effet, $m-n$ est le nombre des valeurs imaginaires de x, répondant à $\lambda=\alpha$.

2. Remarque. L'énoncé et la démonstration supposent que *le coefficient de* x^m *ne s'annule pas pour* $\lambda = \alpha$. En outre, pour plus de simplicité, nous admettons que les valeurs réelles de x, répondant à $\lambda = \alpha$, sont *inégales*.

---

[1] *Algèbre d'Euler*, t. II, nº 238.

3. Corollaire I. *Si, pour* $\lambda = \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots,$ *l'équation* $F(x, \lambda) = 0$ *a* n, n′, n″,... *racines réelles, les nombres* n, n′, n″, ... *sont de même parité.*

4. Corollaire II. *Si une courbe algébrique est rencontrée, en* p, p′, p″, ... *points, par des droites* d, d′, d″, ... *parallèles entre elles, les nombres* p, p′, p″, ... *sont de même parité.*

5. Corollaire III. *Les courbes algébriques n'ont pas de point d'arrêt.*

Supposons qu'un arc AB se termine brusquement en A. Menons, de part et d'autre du *point d'arrêt* A, deux parallèles d,d', infiniment voisines de ce point. Si la droite d, qui coupe AB, a p points communs avec la courbe, la droite d' n'en a que $p-1$. Donc la courbe considérée n'est pas algébrique.

6. Remarque. Soit une ligne plane quelconque, trajectoire d'un point M qui s'arrête après être revenu à sa position initiale A [1] : *le nombre des points d'intersection de cette ligne avec une transversale quelconque, rectiligne ou curviligne, est pair.*

En effet, si la transversale rencontre la courbe aux trois points A, B, C, par exemple ; les arcs AA′, CC′, situés *de part et d'autre* de la transversale, donnent lieu, en se réunissant, à un *quatrième* point d'intersection [2].

7. Remarque. La dernière proposition paraît en défaut dans ce problème, bien connu des écoliers : *tracer, d'un seul coup de crayon, les côtés et l'une des diagonales d'un rectangle* ABCD. Mais, si A est la position initiale du curseur, celui-ci, après avoir décrit la diagonale AC, doit, d'après l'hypothèse (6), revenir en A : cette condition entraîne la construction d'une nouvelle ligne CEA, allant de C en A.

8. Des branches infinies. Si un point M, parti de la position A, décrit une ligne ABCD, de manière que la distance *rectiligne* AM puisse croître au-delà de toute limite, nous dirons que la trajectoire ABCD a *une branche infinie.*

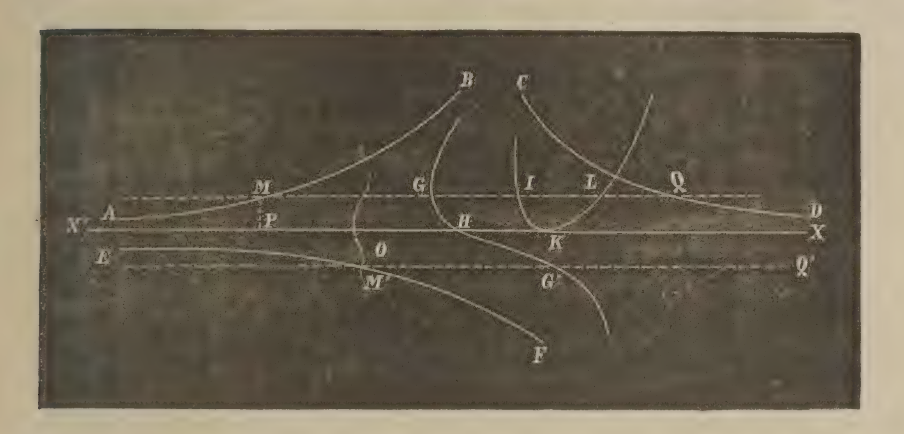
---

[1] Cette ligne est un *trait de plume*, *une toile d'araignée*, etc.

[2] Ce raisonnement est celui dont on fait usage pour établir, par la Géométrie, les théorèmes sur l'*existence des racines réelles.*

9. Remarque. D'après cette définition, un seul arc continu, indéfini dans les deux sens, est considéré comme composé de *deux branches* infinies. Par exemple, *l'hyperbole ordinaire a quatre branches infinies ; la ligne droite a deux branches infinies ; etc.* (1).

10. Théorème. *Dans toute courbe algébrique, le nombre des branches infinies* (2), *asymptotiques à une même droite, est pair.*



Soit F $(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, rapportée à l'asymptote X'OX, prise comme axe des abscisses : $F(x, y)$ est un polynôme entier. Soient $y = \pm \varepsilon$ les équations de deux droites MQ, M'Q', parallèles à X'X : ces transversales rencontrent la courbe en divers points M, G, I, L, Q,..., M', G',... Soient M, Q,... M', ... les points qui s'éloignent indéfiniment de l'origine O et se rapprochent indéfiniment de X'X, lorsque ε tend vers zéro. Pour exprimer cette circonstance, nous dirons que *les points* M, Q,... M' *se transportent à l'infini*, ou que *chacune des branches*

---

(1) Pour éviter toute confusion, on pourrait reprendre les dénominations de *bras* ou de *rameaux*, employées par les anciens Géomètres. C'est ce qu'a fait M. de La Gournerie : « *chaque branche* (infinie) *est formée de deux* bras... » (*Traité de Géométrie descriptive*, 91).

(2) Ou plutôt : *des bras*.

infinies rencontre l'asymptote en un point situé à l'infini (1).

Cela posé, il s'agit de démontrer que le nombre des points M, Q,... M', est *pair*.

Soient n, n' les nombres de valeurs réelles de x répondant à $y = +\varepsilon$, $y = -\varepsilon$: $n+n'$ est pair (*Corollaire* II). Supposons que, pour $y = 0$, l'équation $F(x, y) = 0$ devienne $X = 0$ (2). Les racines réelles de cette nouvelle équation déterminent les points H, K,... situés sur X'X, à des distances finies de l'origine. Soit p le nombre de ces points, ou le nombre des racines réelles de $X = 0$. Comme on le voit à l'inspection de la figure, *ces racines sont les limites communes des racines réelles, soit de l'équation*

$$F(x, \varepsilon) = 0,$$

soit de l'équation

$$F(x, -\varepsilon) = 0,$$

qui ne croissent pas indéfiniment quand ε *tend vers zéro*. Le nombre de celles-ci est donc $2p$ (3). Conséquemment, *le nombre des points situés à l'infini est* $n+n'-2p$.

Remarque. Le théorème peut encore être énoncé ainsi : *Dans toute courbe algébrique, le nombre des points situés à l'infini, sur la courbe et sur une asymptote quelconque, est nécessairement pair.*

E. Catalan.

---

(1) Plusieurs Géomètres, très estimables d'ailleurs, admettent, *a priori*, que *l'asymptote, et une même branche de la courbe, ont* au moins *deux points communs, situés à l'infini*. Cette manière de voir ne me paraît pas acceptable. A plus forte raison ne saurais-je *croire* à l'*axiôme* suivant : « *on peut considérer une droite comme une courbe fermée, dans laquelle un point situé à l'infini forme la jonction des deux bras qui s'étendent dans les deux sens opposés* ; » ou à d'autres du même genre.

(2) On fait abstraction des valeurs infinies de x.

(3) Le point H est la limite commune de G et G' ; le point K est la limite commune de I et de L ; etc. On voit que la démonstration serait en défaut si la courbe considérée pouvait avoir des *points d'arrêt*. Aussi avons-nous commencé par établir qu'elle n'en a pas.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS;

d'après BALTZER ET SALMON.

(Suite. Voir p. 155.)

CHAPITRE II. CALCUL DES DÉTERMINANTS.

II.

Sommes et produits de déterminants.

20. *Notation nouvelle pour les déterminants*[1]. I. Nous représentons, dans ce paragraphe, les déterminants où les indices des colonnes sont remplacés par des lettres, au moyen de la série de ces lettres, placées entre crochets. Ainsi

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Au moyen de cette notation, voici comment on peut exprimer les propriétés II, III, IV, V, pour le déterminant (1) :

$$[abc] = -[acb] = [cab] = -[bac] = [bca] = -[cba]; \tag{2}$$

$$[aac] = 0; \ [abb] = 0; \ \text{etc.} \tag{3}$$

$$[ma, b, c] \text{ ou } [(ma)bc] = m[abc]; \tag{4}$$

$$[a + mb, b, c] \text{ ou } [(a + mb)bc] = [abc]. \tag{5}$$

II. Considérons la permutation principale *abcde* d'un certain nombre de lettres, et une autre permutation quelconque *baedc*. On passera du déterminant $R = [abcde]$, au déterminant $R' = [baedc]$, par un nombre d'échanges de colonnes, égal au nombre d'échanges d'éléments qui permettent de déduire la permutation *baedc* de *abcde*. Selon que ces deux permutations

---

(1) CATALAN, *Bull. de l'Ac. de Brux.* 1re série, t. XIII, P. I, p. 534.

sont ou ne sont pas de même classe, ce nombre est pair ou impair, et par suite R et R′ sont ou ne sont pas de même signe. Les égalités (2) données ci-dessus sont une application de cette remarque.

III. Considérons un déterminant

$$[\beta_1 b,\ \alpha_2 a,\ \varepsilon_3 e,\ \delta_4 d,\ \gamma_5 c],$$

où tous les éléments d'une même colonne sont multipliés par un même facteur, désigné par la lettre grecque correspondant à la lettre ordinaire qui caractérise la colonne ; de plus, cette lettre grecque a un indice égal au rang de cette colonne. Ce déterminant sera

$$\beta_1\alpha_2\varepsilon_3\delta_4\gamma_5\,[baedc] = \pm\ \beta_1\alpha_2\varepsilon_3\delta_4\gamma_5\,[abcde],$$

le signe + ou le signe — convenant, selon que *baedc* ou $\beta\alpha\varepsilon\delta\gamma$ est ou n'est pas une permutation paire.

21. Propriété VI. *Si tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) sont des polynômes de* m *termes, ce déterminant est égal à la somme de* m *déterminants obtenus en remplaçant, dans le déterminant primitif, successivement chaque polynôme par chacun de ces termes.*

Il suffit de démontrer ce théorème dans le cas d'un déterminant de neuf éléments. Soient, par exemple :

$$a_1 = a_1' + a_1'' + a_1''',\ a_2 = a_2' + a_2'' + a_2''',\ a_3 = a_3' + a_3'' + a_3'''.$$

On aura

$$[a' + a'' + a''',\ b,\ c] = [(a' + a'' + a''')\,bc] = [a'bc] + [a''bc] + [a'''bc]. \qquad (6)$$

En effet, le premier de ces déterminants est égal à

$$(a_1' + a_1'' + a_1''')\,A_1 + (a_2' + a_2'' + a_2''')\,A_2 + (a_3' + a_3'' + a_3''')\,A_3\ ;$$

les autres sont, respectivement, égaux à

$$a_1'A_1 + a_2'A_2 + a_3'A_3,$$
$$a_1''A_1 + a_2''A_2 + a_3''A_3,$$
$$a_1'''A_1 + a_2'''A_2 + a_3'''A_3.$$

Corollaire. *Si les éléments de plusieurs colonnes (ou lignes) sont des polynômes, on pourra appliquer plusieurs fois le mode de décomposition donné par le théorème précédent.* Ainsi

$$[a'+a'', b'+b''] = [(a'+a'')(b'+b'')] =$$
$$[a', b'+b''] \text{ ou } [a'(b'+b'')] + [a'', b'+b''] \text{ ou } [a''(b'+b'')] =$$
$$[a'b'] + [a'b''] + [a''b'] + [a''b'']. \qquad (6')$$

Exemple. On trouve, d'après ce corollaire :

$$\begin{vmatrix} a_2b_1 - a_1b_2, & b_2c_1 - b_1c_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3, & b_3c_1 - b_1c_2 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

22. *Résumé mnémonique des propriétés* (III),(IV),(V),(VI). Pour retrouver les égalités (4), (6), (6'), il suffit de mettre, entre crochets, les différents termes de celles-ci, m excepté :

$$(ma)bc = m.abc,$$
$$(a'+a''+a''')bc = a'bc + a''bc + a'''bc,$$
$$(a'+a'')(b'+b'') = a'b' + a'b'' + a''b' + a''b'',$$

où le second membre est formé en effectuant la multiplication indiquée dans le premier, sans interversion des facteurs.

La même règle suffit pour retenir la propriété (5), pourvu que, conformément à la propriété (3), l'on remplace par zéro tout produit où une même lettre se rencontre deux fois. Ainsi

$$[(a+mb)bc] = [abc] + m[bbc] = [abc] + 0 = [abc].$$

La règle précédente permet de calculer très rapidement certains déterminants. Par exemple :

$$[a+b, b+c, c+a] = [abc] + [bca] = 2[abc] ;$$
$$[a-b, b-c, c-a] = [abc] - [bca] = 0.$$

Exercices. 1. Chercher, en général, la valeur de

$$[S-a, S-b, S-c, \ldots],$$

quand $S = a+b+c+\ldots$

2. Décomposer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_2b_1 - a_1b_2, & b_2c_1 - b_1c_2, & . & . \\ a_3b_1 - a_1b_3, & b_3c_1 - b_1c_3, & . & . \\ a_4b_1 - a_1b_4, & b_4c_1 - b_1c_4, & . & . \\ . \quad . \quad . \quad ., & . \quad . \quad . \quad . & . & . \end{vmatrix},$$

et montrer qu'il est égal à $\pm\, b_1c_1 \ldots \times \Sigma \pm a_1b_2c_3\ldots$ (Brioschi).

23. Propriété VII. *Le produit de deux déterminants de degré* n *peut se mettre sous forme d'un autre déterminant de degré* n, *dont les éléments sont les sommes des produits des éléments de chaque ligne ou de chaque colonne du premier, par les éléments de chaque ligne ou de chaque colonne du second.* Ainsi, soient $p = mn$,

$$m = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

On aura :

$$p = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2, & a_1\beta_1+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2, & a_2\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1, & a_1\alpha_2+a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\beta_1, & b_1\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2, & a_1\beta_1+a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2, & b_1\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

Il suffit de démontrer ce théorème, comme on va le voir, pour deux déterminants de neuf éléments :

$$[abc], \quad [\alpha\beta\gamma].$$

Leur produit est le déterminant

$$P = [a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1, \; a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2, \; a\alpha_3+b\beta_3+c\gamma_3]$$

formé d'après la règle précédente. En effet, d'après le n° 22, pour trouver P, il suffit de chercher les termes du produit

$$P' = (a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1)\,(a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2)\,(a\alpha_3+b\beta_3+c\gamma_3)$$

sans intervertir l'ordre des facteurs ; d'égaler à zéro ceux où il y a plus d'une fois l'un des facteurs a, b, c; et, enfin de mettre entre crochets les termes restants, pour les transformer en déterminants. Or, le produit P' contient vingt-sept termes, que l'on obtiendra en écrivant toutes les *permutations*, *avec répétition*, des lettres *abc*, et écrivant à côté de ces lettres les lettres grecques correspondantes, affectées d'un indice convenable. Si l'on supprime de ces permutations toutes celles où il y a répétition, il restera *les* six *permutations*, *sans répétition*, des lettres *abc*, auxquelles correspondront les six déterminants partiels :

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3\,[abc] + \alpha_1\gamma_2\beta_3\,[acb] + \gamma_1\alpha_2\beta_3\,[cab]$$
$$+ \beta_1\alpha_2\gamma_3\,[bac] + \beta_1\gamma_2\alpha_3\,[bca] + \gamma_1\beta_2\alpha_3\,[cba].$$

Chacun des déterminants $[acb]$, $[cab]$, ... est égal à $+ [abc]$ ou $-[abc]$, selon que la permutation correspondante acb ou $\alpha\gamma\beta$, cab ou $\gamma\alpha\beta$, ... est paire ou impaire. Donc

$$P = [abc] \{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\gamma_2\beta_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - \beta_1\alpha_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\beta_2\alpha_1\},$$

ou encore

$$P = [abc]\,[\alpha\beta\gamma].$$

24. Applications. I. *Aire du triangle.* 1° Considérons trois systèmes de coordonnées rectangulaires, le second ayant même origine que le premier et faisant avec lui un angle α, le troisième parallèle au second, mais ayant une autre origine. Soient, dans ces trois systèmes :

$$(x_1'' = 0,\ y_1'' = 0\,;\ x_1' = 0,\ y_1' = 0\,;\ x_1, y_1),$$
$$(x_2'',\ y_2'' = 0\,;\ x_2',\ y_2'\,;\ x_2, y_2),$$
$$(x_3'', y_3''\,;\ x_3', y_3'\,;\ x_3, y_3)$$

les coordonnées de trois points 1, 2, 3 ; d_{12}, d_{23}, d_{31} les carrés de leurs distances mutuelles ; T l'aire du triangle 123, en valeur absolue. On aura, successivement :

$$2\,T = x_2''y_3'' = \begin{vmatrix} x_2'', y_2'' \\ x_3'', y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2' \cos\alpha - y_2' \sin\alpha, & x_2' \sin\alpha + y_2' \cos\alpha \\ x_3' \cos\alpha - y_3' \sin\alpha, & x_3' \sin\alpha + y_3' \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2', y_2' \\ x_3', y_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2', y_2' \\ x_3', y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2° On a encore

$$2T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad -2T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

En multipliant ces deux expressions, on trouve

$$-4T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 & x_1x_3+y_1y_3 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_2x_3+y_2y_3 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & a_2x_3+y_2y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}$$

Multiplions les trois dernières lignes par — 2, divisons la première colonne par — 2 ; ajoutons la première colonne et la première ligne, successivement multipliées par $(x_1^2+y_1^2)$, $(x_2^2+y_2^2)$, $(x_3^2+y_3^2)$, respectivement aux trois dernières colonnes et aux trois dernières lignes. Il viendra :

$$-16\,T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

3° En égalant ce déterminant à zéro, on trouve la condition pour que les points 1, 2, 3 soient en ligne droite.

II. *Rayon du cercle circonscrit au triangle.* Plaçant l'origine au centre du cercle, on aura :

$$-4T^2R^2 = \begin{vmatrix} R & x_1 & y_1 \\ R & x_2 & y_2 \\ R & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R & x_1 & y_1 \\ -R & x_2 & y_2 \\ -R & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix};$$

d'où, a, b, c, étant les côtés, $\pm 4RT = abc$.

Exercices. 1. Trouver, pour le tétraèdre, les formules analogues à celles qui sont données pour le triangle.

2. Trouver la relation qui existe entre les distances deux à deux de quatre points dans un plan ou de cinq points dans l'espace.

3. En effaçant une ligne et une colonne dans les déterminants, qui égalés à zéro, expriment les conditions demandées au n° 2, on trouve la condition pour que quatre points soient sur un cercle, ou que cinq points soient sur une sphère (Comp. n° 13, exercice 3).

4. Trouver la relation qui existe entre les arcs joignant quatre points sur une sphère.

5. L'aire T d'un triangle ayant pour côtés a, b, c, inscrit à une ellipse dont les axes sont 2A et 2B, est donnée par la formule

4T. $a'b'c' = \mathrm{AB}\, abc$,

où $2a'$, $2b'$, $2c'$ sont les diamètres parallèles à a, b, c (JOACHIMSTHAL).

6. Démontrer le théorème de Brioschi (n° 22, exerc. 2), par multiplication de deux déterminants.

7. Le déterminant $\rho = [A, B, C \ldots]$ ayant pour éléments les mineurs du déterminant $R = [a, b, c, \ldots]$, de n^2 éléments, s'appelle le déterminant *adjoint* de R. On a $R\rho = R^n$, $\rho = R^{n-1}$; ρ s'annule si $R = 0$. Les mineurs de ρ jouissent de propriétés analogues (CAUCHY).

9. Généraliser la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = [ab]\,[\alpha\beta]$$

et en déduire la règle de la multiplication des déterminants.

25. CorollairEs. I. Le produit d'un nombre quelconque de déterminants est un déterminant dont le degré ne surpasse pas le plus élevé n des degrés des déterminants donnés, et dont les éléments sont des fonctions rationnelles et entières des éléments donnés. En effet, on peut mettre tous ces déterminants sous forme de déterminants du $n^{\text{ième}}$ degré (n° 17, III), et alors multiplier le premier par le second, le produit par le troisième, et ainsi de suite. On trouve ainsi

$$[abc]\,[pq] = [a, bp_1 + cq_1, bp_2 + cq_2].$$

II. *Le carré d'un déterminant est un déterminant symétrique.* Ainsi le carré de $[abc]$ est égal à

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_2^2+b_2^2+c_2^2, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3, & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}$$

Exercice. 1. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & . & . \\ 1 & b & b^2 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & . \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix},$$

sachant que $s_n = a^n + b^n + \ldots$.

2. Si $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ sont les cosinus des angles que trois droites issues d'un même point forment avec trois axes rectangulaires, et si λ, μ, ν, sont les angles que ces droites font entre elles, on a

$$[abc]^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

CHAPITRE III. APPLICATIONS.

I.

Élimination.

26. *Résultante de* n *équations linéaires*. Considérons le système :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0,$$

ou le suivant, qui est équivalent, si $x_i + x_n y_i = 0, m = (n-1)$:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m = a_{1n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m = a_{nn}.$$

Soit

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On a, d'après les propriétés des mineurs :

$$a_{11}A_{1n} + a_{21}A_{2n} + \cdots + a_{n1}A_{nn} = 0,$$
$$a_{21}A_{1n} + a_{22}A_{2n} + \cdots + a_{n2}A_{nn} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = R.$$

Multiplions la première équation de l'un ou de l'autre système par A_{1n}, la deuxième par A_{2n}, ..., la $n^{ième}$ par A_{nn}, et ajoutons les résultats. Il viendra

$$Rx_n = 0,$$

ou

$$R = 0.$$

Donc *la résultante de* n *équations linéaires homogènes est le déterminant, égalé à zéro, des coefficients des inconnues*, et des termes tout connus, si les équations ne sont pas homogènes.

Remarques. I. D'après les propriétés des mineurs, les équations données sont vérifiées, quand $R = 0$, si l'on suppose

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{11} : A_{12} : \ldots : A_{1n} = A_{21} : A_{22} : \ldots : A_{2n} = \text{etc.};$$

$$y_1 : y_2 : \ldots : y_m = -\frac{A_{11}}{A_{1n}} : -\frac{A_{12}}{A_{1n}} : \ldots : -\frac{A_{1m}}{A_{1n}} = \text{etc.}$$

Ces égalités prouvent que les mineurs des éléments correspondants des lignes (et des colonnes) d'un déterminant nul sont proportionnels.

II. Soit $A_{1n} = A_{2n} = \cdots = A_{nn} = 0$; et, par suite, R identiquement nul. Dans ce cas, $x_n = 0$. On peut supprimer cette inconnue des équations, et l'une des équations. En effet, en multipliant celles-ci par $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni}$, et ajoutant les résultats, on trouve l'équation identique $Rx_i = 0$. L'une des équations, la $n^{\text{ième}}$ par exemple, est donc une conséquence des autres ; de sorte que le système se réduit à $(n-1)$ équations homogènes à $(n-1)$ inconnues.

Applications. I. Pour que l'équation

$$C = ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0$$

représente deux droites, le centre du lieu déterminé par cette équation doit être sur ce lieu. Le centre est donné par les relations

$$ax + hy + g = 0, \qquad (1)$$

$$hx + by + f = 0. \qquad (2)$$

Retranchons les équations (1), (2), multipliées respectivement par x et par y, de $C = 0$. Il viendra

$$gx + fy + c = 0. \qquad (3)$$

L'élimination de x, y, entre les équations (1), (2), (3) donne

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

Réciproquement, si le *discriminant* D de C est nul, on a, les équations (1), (2), (3).

II. Pour que la droite représentée par $P = ux + vy + 1 = 0$ soit tangente à C, le coefficient angulaire de P doit être égal à celui de la tangente, et le point de contact doit être sur P et sur C. Ces conditions donnent, λ étant une auxiliaire,

$$\frac{ax+hy+g}{u} = \frac{hx+by+f}{v} = \frac{gx+fy+c}{1} = \lambda.$$

Eliminant x, y, λ, entre ces équations et $P = 0$, on trouve

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercices. 1. Trouver l'équation d'une droite passant par deux points; d'un cercle passant par trois points; d'une parabole dont l'axe a une direction donnée et passant par trois points ; d'une conique passant par cinq points ; d'une cubique passant par neuf points, etc.

2. Trouver la condition 1° pour qu'une surface du second degré se réduise à un cône ; 2° pour qu'elle soit touchée par un plan ayant pour équation $ux + vy + wz + 1 = 0$.

27. *Résultante de deux équations quelconques. Méthode de Cauchy*. Il suffira de considérer le cas de deux équations du troisième degré, que nous écrirons, comme il suit, sous trois formes différentes :

$$-a_1x^3 = a_2x^2 + a_3x + a_4, \qquad b_2x^2 + b_3x + b_4 = -b_1x^3,$$
$$-(a_1x^3 + a_2x^2) = a_3x + a_4 \qquad b_3x + b_4 = -(b_1x^3 + b_2x^2),$$
$$-(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x) = a_4 \qquad b_4 = -(b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x).$$

Multipliant membre à membre les équations correspondantes, nous trouverons *trois* équations du *second* degré ; l'élimination de x^2, x, entre celles-ci, d'après la méthode du n° précédent,

comme si x^2, x, étaient des inconnues indépendantes, donne la résultante :

$$\begin{vmatrix} (a_1b_2) & (a_1b_3) & (a_1b_4) \\ (a_1b_3) & (a_1b_4)+(a_2b_3) & (a_2b_4) \\ (a_1b_4) & (a_2b_4) & (a_3b_4) \end{vmatrix} = 0$$

Si $b_1 = 0$, c'est-à-dire, si les deux équations ne sont pas de même degré, les calculs se font de même.

Les valeurs de x^0, x, x^2,... sont proportionnelles aux mineurs correspondants aux éléments d'une ligne quelconque des éléments de la résultante. De là, le moyen de trouver la racine commune à deux équations données, si les quantités a, b sont constantes, la valeur de x correspondant à une valeur de y, si a et b sont des fonctions de y.

La méthode de Cauchy est, en pratique, d'une application facile, si l'on forme d'avance les déterminants qui entrent dans la résultante.

Cas particulier. Soit à éliminer x entre les deux équations :

$$x^3+px^2+qx+r = 0, \quad y = a_1+b_1x+c_1x^2 \tag{1}$$

Multiplions la seconde par x, et substituons-y la valeur de x^3, tirée de la première, puis opérons de même sur l'équation trouvée. Il viendra :

$$xy = -c_1r+(a_1-c_1q)x+(b_1-c_1p)x^2 = a_2+b_2x+c_2x^2 \tag{2}$$

$$x^2y = -c_2r+(a_2-c_2q)x+(b_2-c_2p)x^2 = a_3+b_3x+c_3x^2 \tag{3}$$

L'élimination de x, x^2, entre les équations (1), (2), (3), donne la résultante :

$$\begin{vmatrix} a_1-y & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-y & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-y \end{vmatrix} = -(y^3+Py^2+Qy+R) = 0. \tag{4}$$

Cette méthode de transformation est applicable à une équation de degré quelconque. Dans le cas particulier traité ici, on peut disposer de a, b, c, de manière à avoir $P = 0$, $Q = 0$, ce qui permet de trouver y. On en déduit x, en remarquant que 1, x, x^2, sont proportionnels aux mineurs correspondants aux éléments des diverses lignes du déterminant (4).

Exercices. 1. Résoudre l'équation du 4e degré en la ramenant à une équation bicarrée, au moyen d'une substitution cubique.

2. Eliminer x entre une équation de degré n en x et la relation $y = \frac{Fx}{fx}$, Fx et fx étant des fonctions entières de degré quelconque. Le degré de la résultante en y est n.

II.

Résolution des équations linéaires.

28. *Equations linéaires non homogènes.* Considérons le système suivant, où $n = (m+1)$:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m = a_{1n}, \qquad (1_1)$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_m = a_{2n}, \qquad (1_2)$$

. . . .

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mm}y_m = a_{mn}. \qquad (1_m)$$

Posons $R = (a_{11}\, a_{22} \ldots a_{mm})$ et supposons que ce déterminant ne soit pas nul. Appelons A_{ik} le mineur correspondant à un élément a_{ik}. Multiplions les équations (1), d'abord par A_{11}, A_{22}, ..., A_{m1}, et ajoutons les résultats ; puis, par A_{21}, A_{22}, ..., A_{m2}, et ajoutons encore les résultats ; et ainsi de suite. Nous trouverons les relations

$$Ry_1 = R_1,\ Ry_2 = R_2, \ldots, Ry_m = R_m,$$

en appelant R_1, R_2, ..., R_m, les déterminants obtenus en remplaçant les éléments de la première, de la deuxième, ..., de la $m^{\text{ième}}$ colonne de R par les seconds membres des équations données. On déduit des relations précédentes :

$$y_1 = \frac{R_1}{R},\ y_2 = \frac{R_2}{R}, \ldots, y_m = \frac{R_m}{R} \qquad (2)$$

Comme Gauss l'a remarqué, nous devons vérifier ces valeurs. Si nous les substituons dans les équations données, il vient :

$$a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \cdots + a_{1m}R_m - a_{1n}R = 0, \qquad (3_1)$$

$$a_{21}R_1 + a_{22}R_2 + \cdots + a_{2m}R_m - a_{2n}R = 0, \qquad (3_2)$$

. . . .

$$a_{m1}R_1 + a_{m2}R_2 + \cdots + a_{mm}R_m - a_{mn}R = 0. \qquad (3_m)$$

Ces équations sont identiques. En effet, le premier membre de (3_1), par exemple, est égal (au signe près, si n est impair), au déterminant suivant, qui a deux lignes et deux colonnes identiques, et, par suite, est nul :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mm} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

On vérifie de même que les autres égalités (3) sont identiques.

Remarques. I. Si $R = 0$, on pose $x_i + y_i x_n = 0$, et l'on ajoute, par la pensée, au système transformé une équation

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0,$$

telle que le déterminant $(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn})$ soit nul. On retombe ainsi sur le système homogène étudié plus haut. Cette transformation peut servir, d'ailleurs, même dans le cas où R n'est pas nul.

II. Le système

$$\begin{gathered} a_{11}\, u_1 + a_{21}\, u_2 + \cdots + a_{m1}u_m = a_{n1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1m}\, u_1 + a_{2m}u_2 + \cdots + a_{mm}u_m = a_{nm}, \end{gathered}$$

est tel que

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}\, y_m = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}\, u_m.$$

Application. Soient (x_3y_3), (x_1y_1), (x_2y_2), les coordonnées des points F, D, E, sommets d'un triangle dont les côtés ont pour équations :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,\ a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

Posons $r = (a_1 b_2 c_3)$ et appelons A_1, B_1, ..., C_3, les mineurs de r. On aura :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -c_2, & b_2 \\ -c_3, & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{A_1}{C_1},\quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2, & -c_2 \\ a_3, & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{B_1}{C_1}$$

$$x_2 = \frac{A_2}{C_2},\ x_3 = \frac{A_3}{C_3}\ ;\ y_2 = \frac{B_2}{C_2},\ y_3 = \frac{B_3}{C_3}.$$

On conclut de là que les sommets ont pour équation tangentielle :

$$A_1u+B_1v+C_1 = 0,\ A_2u+B_2v+C_2 = 0,\ A_3u+B_3v+C_3 = 0,$$

et que le double de l'aire du triangle est, en valeur absolue,

$$\begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1}, & \frac{B_1}{C_1}, & 1 \\ \frac{A_2}{C_2}, & \frac{B_2}{C_2}, & 1 \\ \frac{A_3}{C_3}, & \frac{B_3}{C_3}, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{C_1C_2C_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{r^2}{C_1C_2C_3}$$

Exercices. 1. Trouver le volume d'un tétraèdre, les équations des quatre faces étant données.

2. Trouver les formules de transformation des coordonnées trilinéaires, ponctuelles ou tangentielles, en coordonnées cartésiennes, les équations du triangle de référence étant données.

3. Démontrer la règle de la multiplication des déterminants, par la considération des deux systèmes d'équations :

$$\begin{aligned} a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 &= d_1, \qquad & \alpha_1x_1 + \beta_1x_2 + \gamma_1x_3 &= y_1, \\ a_2y^1 + b_2y_2 + c_2y_3 &= d_2, & \alpha_2x_1 + \beta_2x_2 + \gamma_2x_3 &= y_2, \\ a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 &= d_3, & \alpha_3x_1 + \beta_3x_2 + \gamma_3x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

On résout le système en y, puis celui en x ; on élimine les y, on résout le système résultant, et l'on compare les valeurs trouvées pour les x, dans ces deux cas.

P. Mansion.

SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM, APPELÉE PROBLÈME D'HUYGENS.

1. Si deux quantités positives, $x=r-z$ et y, ont un produit constant r^2, leur somme

$$r-z+\frac{r^2}{r-z}=2r+\frac{z^2}{r-z}$$

est la plus petite possible pour $z=0$, c'est-à-dire, quand $x=y=r$.

Si l'on considère un nombre quelconque de quantités, quatre, par exemple, dont le produit $xyzu$ soit égal à une constante p, leur somme

$$S_1=x+y+z+u$$

est la plus petite possible, quand elles sont égales. En effet, tant que deux de ces quantités sont inégales, on peut diminuer la somme S_1, en les remplaçant l'une et l'autre par la racine carrée de leur produit.

De ces principes connus, on déduit, comme on va le voir, la solution d'une question célèbre, appelée *problème d'Huygens.*

2. Les sommes

$$S_2=xy+xz+xu+yz+yu+zu,$$
$$S_3=xyz+xyu+xzu+yzu,$$

des produits deux à deux, trois à trois, de ces quatre quantités, se composent de termes qui, multipliés entre eux, donnent le produit constant p^3. Ces sommes sont donc les plus petites possibles, lorsque ces termes sont égaux, ce qui arrive quand

$$x=y=z=u.$$

3. Le produit

$$P=(1+x)(1+y)(1+z)(1+u),$$

égal à

$$1+S_1+S_2+S_3+p,$$

a aussi sa valeur la plus petite, quand

$$x=y=z=u,$$

parce que les sommes S_1, S_2, S_3 ont alors leur valeur minima.

4. L'expression

$$H = \frac{aXYZ}{(a+X)(X+Y)(Y+Z)(Z+x)},$$

dans laquelle a et b sont constants, X, Y, Z variables, peut s'écrire

$$\frac{1}{\left(1+\frac{X}{a}\right)\left(1+\frac{Y}{X}\right)\left(1+\frac{Z}{Y}\right)\left(1+\frac{x}{Z}\right)}.$$

La plus grande valeur de H, ou la plus petite valeur du dénominateur de la dernière expression, correspond à

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{X} = \frac{Z}{Y} = \frac{x}{Z};$$

car le produit

$$\frac{X}{a} \cdot \frac{Y}{X} \cdot \frac{Z}{Y} \cdot \frac{b}{Z} = \frac{x}{a}$$

est constant.

5. Ce qui précède peut évidemment s'étendre à autant de variables qu'on le veut. On est conduit à chercher le maximum d'une expression analogue à H et contenant n variables, en traitant la question suivante : « Soient tant de corps que l'on voudra, parfaitement élastiques et rangés en ligne droite : le premier vient frapper le second avec une vitesse donnée ; le deuxième, avec la vitesse communiquée par le premier, choque le troisième ; celui-ci, avec sa vitesse acquise, choque le quatrième ; et ainsi de suite. Les masses a et b du premier et du dernier étant données, trouver celles que doivent avoir les corps intermédiaires pour que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible ».

M. PICART a traité assez longuement cette question, appelée *problème d'Huygens*, au moyen du calcul différentiel (*Nouv. Ann. de Math.*, 1874, p. 212-219). Les géomètres (HUYGENS, LAGRANGE, etc.), qui l'ont résolue antérieurement, dit-il, ont démontré que l'on avait vraiment affaire à un maximum de H, seulement dans le cas de trois corps ou d'une seule variable. On voit que l'Algèbre élémentaire conduit à une solution complète et très simple de cette question.

Janvier 1875. P. MANSION.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 18.

(N. C. M., p. 66 et 162.)

Le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs du triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle inscrit à ABC, *a pour mesure*

$$\frac{16\,T^5}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2},$$

T *étant l'aire du triangle* ABC, *et* a, b, c, *les longueurs des trois côtés.* (E. Hain).

Soient I le centre, et M, N, P les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC ; soient Q, R, S les pieds des hauteurs du triangle MNP, et H leur point d'intersection ; soient enfin Q', R', S' les points de rencontre des prolongements de ces hauteurs avec la circonférence MNP.

Les hauteurs du triangle MNP sont les bissectrices des triangles QRS, Q'R'S' ; donc les arcs R'M, S'M sont égaux, et le rayon IM est perpendiculaire à R'S'. Les angles R'PR, RPH étant égaux, R est le milieu de HR'. De même, S est le milieu de HS' ; donc RS est parallèle à R'S' et BC. Pour la même raison, QR, QS sont, respectivement, parallèles à AB, AC. Les triangles ABC, QRS sont donc semblables, et leurs aires T, T' sont proportionnelles aux carrés des rayons des cercles circonscrits. Le premier rayon égale $\frac{abc}{4T}$; le second, moitié de IM, égale $\frac{T}{a+b+c}$. Conséquemment :

$$\frac{T'}{T} = \frac{T^2}{(a+b+c)^2} : \frac{a^2b^2c^2}{16T^2};$$

d'où

$$T' = \frac{16T^5}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2}.$$

REMARQUE. *Le triangle* MNP *est moyen proportionnel entre* ABC *et* QRS.

En effet, les angles PIN, BAC étant supplémentaires, on a

$$\frac{\text{INP}}{\text{T}} = \frac{\text{IN}\times\text{IP}}{\text{AB}\times\text{AC}};$$

d'où, en désignant par r le rayon du cercle MNP :

$$\text{INP} = \text{T}\frac{r^2}{bc}.$$

De même,

$$\text{IPM} = \text{T}\frac{r^2}{ca}, \quad \text{IMN} = \text{T}\frac{r^2}{ab};$$

puis

$$\text{MNP} = \text{T}\,\frac{r^2(a+b+c)}{abc} = \frac{4\text{T}^3}{abc(a+b+c)}.$$

LEDENT, professeur à l'école industrielle et littéraire de Verviers.

Note. M. Barzin nous a envoyé une solution de cette question, basée sur ces deux propositions connues : 1° Les droites QR, RS, SQ, sont anti-parallèles à MN, NP, PN. 2° Le cercle circonscrit à QRS est le cercle des neuf points du triangle MNP.

—

Question 22.

(N. C. M., p. 66 et 124.)

Remarques sur la solution de M. PHILIPPIN (p. 124), par M. SALTEL. I. Le problème peut être traité uniquement par la Géométrie, si l'on a égard au théorème suivant, démontré dans le *Mémoire sur le principe arguesien* (paragraphe V du chapitre des *coniques)* [1] :

Pour déterminer les directions des axes de deux paraboles qui passent par quatre points donnés ; menez, par un point arbitraire

---

[1] *Mémoires* in-8° *de l'Académie de Belgique*, t. XXIII.

P, *des parallèles aux côtés opposés du quadrilatère formé par les quatre points. Les rayons doubles du faisceau en involution, déterminé par ces quatre droites, sont les directions demandées.* Ce théorème conduit naturellement à cette construction (p. 124) :

Par le point C, *menez deux droites faisant entre elles un angle égal à l'angle donné*, η ; *considérez-les comme rayons doubles d'un faisceau en involution. Dans ce faisceau, prenez les rayons homologues à* CB, CA ; *et menez, par les points* A, B, *des parallèles à ces nouveaux rayons : ces droites se couperont en un point du lieu.*

Nota. La traduction algébrique de cette construction conduit, très facilement, à l'équation cartésienne du lieu.

II. M. Philippin a fait observer que le lieu est l'arguesienne d'un cercle. Cette propriété n'appartient pas seulement à la quartique trinodale en question. En effet : *toute quartique trinodale, doublement tangente à la droite de l'infini, aux points circulaires, peut être considérée comme l'arguesienne triangulaire d'un cercle.* Plus généralement : *toute quartique trinodale, qui passe par les points circulaires, est l'arguesienne cubique d'un cercle* [1].

III. *Il est toujours possible de construire, avec la règle et le compas, les quatre droites doublement tangentes à une quartique trinodale.* Ces droites sont, en effet, les arguesiennes des coniques passant par les trois points doubles, et doublement tangentes à la conique arguesienne de la quartique proposée [2].

Extrait d'une lettre de M. Dewulf. M. Dewulf nous envoie la même observation que M. Saltel touchant la construction géométrique du lieu :
« Il est facile d'arriver, par la Géométrie, à la construction, par points,
« de la quartique trinodale de la question 22 (N. C. M., p. 124), et
« cette construction démontre le théorème énoncé dans la note de la
« page 132.

« Soit M un point du lieu cherché. Traçons CA′ parallèle à BM et CB′
« parallèle à AM ; construisons les rayons doubles de l'involution déter-

---

(1) Mémoire cité : Note sur l'*hypocycloïde à trois rebroussements.*

(2) Mémoire cité : paragraphe VIII.

» minée par les couples de rayons CA, CA′ et CB, CB′. Ces rayons don-
» nent les directions des axes des deux paraboles circonscrites à ACBM.
» Pour effectuer la construction, traçons le cercle ACB; nommons A′, B′
» ses intersections avec les rayons CA′,CB′ ; tirons AA′,BB′ : ces droites
» se coupent en S. Menons les tangentes ST, ST′ à la circonférence :
» TCT′ est l'angle cherché.

» Soit O le centre de la circonférence ACB :

$$\text{» } TCT' = \tfrac{1}{2}\, TOT' = \tfrac{1}{2}\,(\pi - TST').$$

» Donc, si TCT′ doit être constant, le point S parcourt une circonfé-
» rence concentrique à la circonférence ACB.

» Vos lecteurs trouveront facilement tout le parti que l'on peut tirer
» de cette manière d'envisager la question qui n'est qu'une simple appli-
» cation des numéros 162 et 170 des *Éléments de Géométrie projective*, de
» M. Cremona [1]. »

Voici quelques questions analogues à la question 22, qui nous ont été envoyées par M. Dewulf.

1. On donne trois droites fixes *a*, *b*, *c* et un point M. Il existe deux paraboles tangentes à *a*, *b*, *c* et passant par M. Quel lieu doit parcourir le point M, pour que les axes des deux paraboles, ou les paraboles elles-mêmes se coupent sous un angle constant ?

2. On donne deux droites fixes, *a*, *b* et un point fixe M. On donne aussi une droite *c*. Quelle doit être l'enveloppe de C pour que les deux paraboles tangentes à *a*, *b*, *c*, et passant par M, se coupent en ce point sous un angle constant, ou que les axes de ces paraboles se coupent sous un angle constant ?

Question 34.

(N. C. M., p. 96.)

Soient A, B, C, D, *quatre points d'une même circonférence. Démontrer que les centres des cercles inscrits aux triangles* ABC, ABD, BCD, ABD *sont les sommets d'un rectangle.*

Ce curieux théorème a été démontré par MM. Maurice Cabart, Seron, P. S.; Michez et Debacker, lèves à l'Athénée de Mons; Van Aubel, Derousseaux, Brocard. Les solutions de MM.

---

[1] Cet ouvrage vient d'être traduit par M. Dewulf. Nous espérons pouvoir en rendre compte (E. C).

Cabart, Michez et Debacker sont surtout remarquables. Nous les résumons ainsi :

LEMME I. E, F, G, H étant les milieux des arcs consécutifs AEB, BFC, CGD, DHA ; les cordes EG, FH se coupent orthogonalement.

LEMME II. ABC étant un triangle inscrit, soient A′, B′, C′ les milieux des arcs consécutifs BA′C, CB′A, AC′B ; et soit I le point où se coupent les bissectrices AA′, BB′, CC′. *Ce point* I, centre du cercle inscrit au triangle ABC, *est* en même temps *l'intersection commune des circonférences décrites des points* A′, B′, C′ *comme centres, avec* A′B=A′C, B′C=B′A, C′A=C′B *pour rayons.*

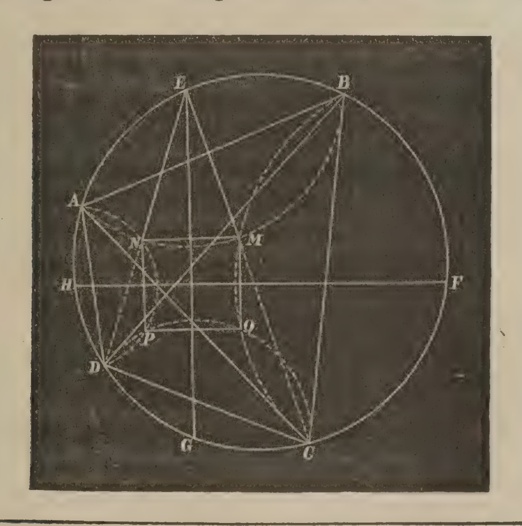
Démontrons, par exemple, que A′I = A′B. Dans le triangle A′IB, l'angle I a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\,(\textit{arc}\ A'B + \textit{arc}\ AB')\ ;$$

l'angle B a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\,(\textit{arc}\ A'C + \textit{arc}\ CB') = \tfrac{1}{2}\,(\textit{arc}\ A'B + \textit{arc}\ AB').$$

Ainsi, les angles I, B sont égaux ; donc A′I = A′B ; etc. (1).



(1) Il résulte, du second Lemme, que *les cordes* A′B′, B′C′, C′A *sont, respectivement, perpendiculaires aux milieux des droites* CI, AI, BI.

Au moyen de ces deux lemmes, la démonstration du théorème ne présente plus aucune difficulté.

En effet, les centres M, N, des cercles inscrits aux triangles ABC, ABD, sont situés sur la circonférence BMNA, qui a E pour centre ; donc la base MN du triangle *isocèle* MEN est perpendiculaire à la *bissectrice* EG de l'angle DEC ; etc. (¹)

Remarque. Si l'on prend pour unité le rayon du cercle donné, et que l'on représente par 2α, 2β, 2γ, 2δ les arcs AEB, BFC, CGD, DHA, on trouve :

$$MN = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad MQ = 4 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}.$$

Par conséquent, l'aire du rectangle est

$$16 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}.$$

(E. C)

—

Question 37.

(N. C. M., p. 97.)

Le nombre d'années nécessaires pour qu'une somme d'argent, placée à intérêt composé, à t °/₀ *par an, soit doublée, est égal, à* 3 *jours près, au quotient de* 69,315 *par* t, *augmenté de* 0,346, t *n'étant pas supérieur à* 12 (F. Thoman).

Voici, sauf quelques légères modifications, la solution de M. P. S.

La formule connue donne l'équation

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^x = 2.$$

Il en résulte

$$x = \frac{l.2}{l.\left(1 + \frac{t}{100}\right)} = \frac{0,693\ 147\ 180\ \ldots}{\frac{t}{100} - \frac{t^2}{2.100^2} + \frac{t^3}{3.100^3} - \ldots},$$

(¹) M. Derousseaux fait observer que les côtés du rectangle MNPQ sont parallèles (ou perpendiculaires) aux bissectrices des angles formées par les diagonales du quadrilatère ABCD.

ou

$$x = \frac{69,314\,718\ldots}{t\left(1 - \frac{t}{200} + \frac{t}{30\,000} - \ldots\right)};$$

ou, à fort peu près,

$$x = \frac{69,315}{t}\left[1 + \frac{t}{200} - \left(\frac{1}{30\,000} - \frac{1}{40\,000}\right) t^2\right]; \text{(1)}$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{69,315}{t} + 0,346 - \frac{t.\ 69,315}{120\,000}.$$

Si t ne surpasse pas 12, le troisième terme est inférieur à $\frac{12.70}{120\,000} = 0,007$. Or, 7 millièmes d'année font $2^j,555$. Donc, si l'on prend $x = \frac{69,315}{t} + 0,346$, l'erreur que l'on commet est inférieure à 3 jours, conformément à la formule énoncée (2).

Note. M. Van Aubel nous a aussi envoyé une solution de cette question.

—

Question 44.

(N. C. M., p. 136.)

μ étant une quantité positive quelconque.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{\mu+2n-1} + \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+n}\right] = l.\ 2.$$

(E. C)

M. le capitaine Laisant et M. le capitaine De Tilly nous ont

---

(1) Ici, à un raisonnement qui n'est pas très clair, nous substituons le développement en série. (E. C)

(2) D'après M. Bertrand, Fédor Thoman, calculateur extraordinaire, mort beaucoup trop tôt, était un très-grand personnage Russe, obligé de changer de nom. (E. C)

envoyé les deux démonstrations suivantes, également remarquables, mais très différentes de forme, comme le lecteur en jugera.

Démonstration de M. Laisant. « En substituant à n une série « de valeurs, 1, 2, 3, ... p, on reconnaît immédiatement que le « premier membre prend la forme

$$lim \left[\frac{1}{\mu+p+1}+\frac{1}{\mu+p+2}+\dots+\frac{1}{\mu+2p}\right](p=\infty). \quad (1)$$

« Je dis tout d'abord que cette limite est indépendante de μ. « Soit en effet μ' une autre quantité positive. La différence « entre le polynôme écrit dans les parenthèses et le suivant

$$\frac{1}{\mu'+p+1}+\frac{1}{\mu'+p+2}+\dots+\frac{1}{\mu'+2p}$$

« sera

$$(\mu-\mu')\left[\frac{1}{(\mu+p+1)(\mu'+p+2)}+\dots+\frac{1}{(\mu+2p)(\mu'+2p)}\right]$$

$$<\frac{(\mu-\mu')p}{(\mu+p+1)(\mu'+p+2)};$$

« et la limite du second nombre est zéro pour $p=\infty$.

« Nous pouvons donc considérer, au lieu de (1), l'expression « plus simple :

$$lim \left[\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots+\frac{1}{2p}\right](p=\infty), \quad (2)\ (^1)$$

« obtenue en faisant $\mu=0$. L'expression entre parenthèses peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2p}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{p}\right)$$

---

(1) $lim \left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots+\frac{1}{2p}\right)=l.\,2.$ (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XVII, p. 434). (E. C)

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p}\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2p}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p};$$

« en sorte que la limite cherchée est

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = l.\,2. \text{ (}^1\text{)}$$

« Remarque. Le théorème subsiste encore lorsque $\mu < 0$, et « il est même applicable à toute valeur finie de μ, réelle ou imaginaire [2].

Démonstration de M. De Tilly « On a d'abord, identiquement :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{(\mu+2u-1)^2} + \frac{1}{(\mu+2u)^2} - \frac{1}{(\mu+u)^2} \right\} = 0; \qquad (1)$$

« car, ici, les trois séries correspondant aux trois termes entre « les crochets sont séparément convergentes, et l'on peut ran- « ger les termes de la somme Σ, de manière qu'ils se réduisent « deux à deux [3].

---

[1] On a, identiquement,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}.$$

(Note sur une formule de M. Botesu, Bulletins de l'Académie de Belgique, 1872.*)* (E. C)

[2] Si μ est *entier négatif*, deux termes de la série proposée deviennent infinis. L'assertion de M. L. paraît donc un peu hasardée. On va voir que M. De Tilly la justifie. (E. C)

[3] La troisième série, convergente si μ est positif, a *tous ses termes de même signe*. On peut donc les grouper dans un ordre arbitraire, et, en particulier, dans celui-ci :

$$-\frac{1}{(\mu+1)^2} - \frac{1}{(\mu+3)^2} - \frac{1}{(\mu+5)^2} - \dots$$

$$-\frac{1}{(\mu+2)^2} - \frac{1}{(\mu+4)^2} - \frac{1}{(\mu+6)^2} - \dots$$

(E. C)

« Multipliant par $d\mu$ et intégrant entre 0 et μ, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{\mu+2n-1}+\frac{1}{\mu+2n}-\frac{1}{\mu+n}\right\}\text{(1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=l.\,2$$

« .... ma démonstration est indépendante du signe de μ. En « d'autres termes, on a cette seconde série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{\mu-2n+1}+\frac{1}{\mu-2n}-\frac{1}{\mu-n}\right\}=-\,l.\,2. \qquad (2)$$

« En ajoutant les deux séries trouvées, on a :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{2\mu}{\mu^2-(2n-1)^2}+\frac{2\mu}{\mu^2-(2n)^2}-\frac{2\mu}{\mu^2-n^2}\right\}=0\,;$$

« ce qui, étant une identité, au même titre que la formule (1), « .... confirme tout ce qui précède....

« Dans le cas particulier où μ est entier, deux termes de la « série (2) deviennent infinis. L'un correspond à $n=\mu$; l'autre à $n=\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu+1}{2}$, selon que μ est pair ou impair. La somme al- « gébrique de ces deux termes infinis [2] converge d'ailleurs vers « une quantité finie, pendant que μ converge lui-même vers la

---

(1) L'équation (1) est la dérivée de

$$\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\mu+2n-1}+\frac{1}{\mu+2n}-\frac{1}{\mu+n}\right\}=\textit{const.}$$

Le second membre de celle-ci étant *indépendant* de μ, il en est de même pour le premier membre. On peut donc, sans altérer la somme cherchée, prendre $\mu=0$; etc. E. C.

(2) Plus exactement : *la somme algébrique, des deux termes qui deviennent infinis, converge...* E. C.

« valeur entière. Il n'y a donc point là une véritable *exception :*
« mais, à la rigueur, il faut écrire (pour le cas où μ est pair,
« par exemple) :

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{\mu}{2}-1} + \sum_{n=\frac{\mu}{2}+1}^{n=\mu-1} + \sum_{n=\mu+1}^{n=\infty} = -l2 - 1 + \frac{4\mu-3}{\mu(\mu-1)}\ ;$$

« le terme général des trois séries étant le même que dans l'é-
« quation (2) [1] ».

QUESTIONS PROPOSÉES.

45. Sur les segments AC,BC, d'une droite AB, et sur la droite AB elle même, on construit des triangles équilatéraux, ayant respectivement AC,BC,AB pour côtés, et situés, les deux premiers, d'un côté de AB, le troisième, de l'autre côté. 1° Les centres de gravité M, L, N de ces trois triangles sont les sommets d'un

---

[1] Si, dans le terme général, on fait $n = \frac{\alpha}{2}$, $n = \alpha$, on trouve

$$\frac{1}{\mu-\alpha+1} + \frac{1}{\mu-\alpha} - \frac{1}{\mu-\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{1}{\mu-2\alpha+1} + \frac{1}{\mu-2\alpha} - \frac{1}{\mu-\alpha};$$

quantités dont la somme est

$$\frac{1}{\mu-\alpha+1} + \frac{1}{\mu-2\alpha+1} + \frac{1}{\mu-2\alpha} - \frac{1}{\mu-\frac{\alpha}{2}}.$$

Pour $\alpha = \mu$, cette somme devient

$$1 - \frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\mu} = 1 - \frac{4\mu-1}{\mu(\mu-1)}\ ;\ \text{etc.}$$

(E. C)

triangle équilatéral; 2° le centre de gravité de ce triangle est sur la ligne AB. 3° Les côtés LM, MN, NL rencontrent, respectivement, les trois côtés des premiers triangles qui aboutissent en C, en A, en B, en des points (C_1, C_2, C_3) (A_1, A_2, A_3) (B_1, B_2, B_3). Ceux de ces neuf points qui appartiennent à un même triangle primitif, c'est-à-dire (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3), sont en ligne droite. 4° Les trois droites ainsi obtenues forment un triangle équilatéral PQR, dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du triangle LMN. 5° Le centre de gravité de PQR est situé sur AB ([1]).

46. La conique représentée par

$$A_{11}\alpha^2+A_{22}\beta^2+A_{33}\gamma^2+2A_{12}\alpha\beta+2A_{23}\beta\gamma+2A_{31}\gamma\alpha=0,$$

rencontre les côtés du triangle de référence en six points tels, que les droites qui les joignent aux sommets opposés du triangle sont tangentes à une seconde conique. Trouver l'équation de cette conique. (HESSE)

47. Les droites qui joignent les sommets d'un triangle ABC à deux points quelconques M et N, rencontrent les côtés opposés en six points situés sur une même conique. Trouver l'équation de cette conique, en fonction des coordonnées des points M, N.

48. La conique dont l'équation est

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+D\delta^2=0$$

divise harmoniquement les diagonales du quadrilatère complet représenté par $\alpha\beta\gamma\delta=0$.

49. Des plans parallèles, coupant deux droites quelconques aux points (A, A'), (B, B'), ..., on a les relations

---

([1]) Le premier de ces théorèmes nous a été communiqué par J. DEROUSSEAUX, élève de première année à l'Ecole normale des sciences (1874). *(Note de la Rédaction.)*

$$\frac{\overline{AA'}^2}{AB.AC}+\frac{\overline{BB'}^2}{BA.BC}+\frac{\overline{CC'}^2}{CA.CB}=1,$$

$$\frac{\overline{AA'}^2}{AB.AC.AD}+\frac{\overline{BB'}^2}{BA.BC.BD}+\frac{\overline{CC'}^2}{CA.CB.CD}+\frac{\overline{DD'}^2}{DA.DB.DC}=0.$$

(J. N)

50. Soient ABCD un tétraèdre quelconque, M un point quelconque de l'arête CD ; démontrer la formule

$$\overline{ABM}^2.\overline{CD}^2 =$$

$$\overline{ABC}^2.\overline{DM}^2+\overline{ABD}^2.\,\overline{CM}^2-2\overline{ABC}.\overline{ABD}.DM.CM\cos\overline{CABD}.$$

(J. N)

51. Les quatre coniques circonscrites à un triangle donné ABC, et dont un foyer est le point donné F, se coupent, deux à deux, en six nouveaux points D_{12}, D_{13}, ... Démontrer que chacune des trois coniques ayant pour foyer le point F, pour directrice l'un des côtés du triangle ABC, et passant par le sommet opposé de ce triangle, contient deux des points D.

(J. N)

52. Théorème. ABC... étant un polygone de n côtés, inscrit à un cercle dont le centre est R ; soient G le centre de gravité du système des points A, B, C, ..., et O un point pris sur la circonférence qui a pour diamètre GR. La *puissance* du point O, par rapport au cercle R, a pour expression

$$\frac{1}{n}\left(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\ldots\right)$$

(Laisant, capitaine du génie, à Tlemcen)

53. Théorème. Le lieu des points dont la somme des puissances, par rapport à n circonférences données, est constante, est une circonférence. (Laisant)

54. Trouver le lieu d'un point M tel, que la somme de ses

puissances, par rapport à n circonférences données, croisse proportionnellement : 1° aux accroissements des arcs de la courbe parcourue par M ; 2° aux accroissements des carrés des mêmes arcs. (LAISANT.)

55. Soit AOB un angle donné, coupé par deux transversales AB, A'B' parallèles à une direction fixe, de telle sorte que l'aire du trapèze ABA'B' soit constante. Démontrer que les lieux des milieux des diagonales AB', A'B sont deux hyperboles conjuguées. (LAISANT.)

56. Le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle est la circonférence des neuf points. (CAMBIER.)

57. Construire un triangle rectiligne dont on donne les trois bissectrices intérieures.

(H. BROCARD, capitaine du génie, à Alger.)

58. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2+x^3+x^4+x^5 = y^2.$$

(H. BROCARD.)

59. On donne, dans un plan, deux points fixes, O, A. Du point A, on mène une droite quelconque AB, sur laquelle le point O se projette en B. On joint le point B au milieu C de OA, et l'on mène BB' perpendiculaire à BC : le point O se projette, en B', sur BB'. On joint le point B' au milieu C' de OB ; et ainsi de suite. Le lieu des points B, et l'enveloppe des droites AB, BB', ... sont des *spirales équiangles*.

De ce théorème, on déduit une propriété des podaires successives d'une courbe plane, et la propriété de la spirale équiangle d'être, à elle-même, sa podaire. (H. BROCARD.)

60. On sait que l'équation générale du cinquième degré,

$$x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 = 0, \qquad (1)$$

peut être ramenée à la forme

$$y^5 + py + q = 0\ [1]. \qquad (2)$$

---

[1] Ce beau théorème est dû à M. Jerrard, Géomètre anglais. (E. C.)

La transformation exige la résolution d'une seule équation du troisième degré. La proposée pouvant admettre cinq racines réelles, et la transformée n'en pouvant admettre que trois, au plus, on demande ce que doivent devenir deux des racines de la proposée. (H. Brocard.)

61. Les hauteurs d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite, en des points A′, B′, C′, respectivement opposés aux sommets A, B, C. Soient *c, a, b*, les points où les cordes A′B′, B′C′, C′A′ rencontrent, respectivement, les côtés AB, BC, CA. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite. (H. Brocard.)

62. On donne trois circonférences ayant même axe radical OI. On les coupe par une quatrième circonférence. Soient A, A′; B, B′ ; C, C′ les couples de points ainsi obtenus. Démontrer que les cordes AA′, BB′, CC′ se rencontrent en un même point de OI. (H. Brocard.)

63. Étant donnés deux axes rectangulaires, OX, OY, et une droite AB, qui les rencontre aux points A, B; on projette le point O en C, sur AB, et l'on construit, avec des parallèles aux axes, menées par A, B, C, les projections F, G de C, sur les axes, et les *gradins* BDC, CEA.

1° Le coefficient angulaire de DE est le cube du coefficient angulaire de BA.

2° Les droites FG, BA, DE se rencontrent en un même point.

3° Quel est le lieu de ce point, lorsque la distance CO reste constante ? (H. Brocard.)

64. Étant donnée la relation

$$y\sqrt[4]{\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}}=e^{-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{2(x-\sqrt{x^2-y^2})}},\ \text{calculer}\ \frac{dy}{dx}\,;$$

(H. Brocard.)

65. 1° Méthode pour ranger un carré quelconque en carré magique.

2° Question du carré 22^2, qui reste planétaire si l'on enlève *trois* enceintes, puis encore deux à la même condition *(sic)*, puis encore une seule à la même condition.

3° Nombre de solutions qui peuvent arriver à chaque carré.

(FERMAT [1]).

66. Si, dans le triangle ABC, on mène la bissectrice AD, puis que, du point D où elle rencontre BC, on élève EDF perpendiculaire à AD, et coupant les autres côtés en E, F, on aura

$$\frac{2}{AE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

(MICHEZ, élève de l'Athénée de Mons.)

ESQUISSES BIOGRAPHIQUES.

II.

O. HESSE.

Otto Hesse, né le 22 avril 1811, mort le 4 août 1874, fut l'un des disciples les plus distingués de Jacobi. Successivement professeur à Königsberg, Halle, Heidelberg et Munich, il contribua beaucoup à propager la connaissance des méthodes de la Géométrie analytique moderne, tant par son enseignement que par son principal ouvrage : *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes.*

Parmi ses travaux, qui sont tous des modèles d'élégance mathématique, il faut citer : 1° la détermination du huitième

---

[1] Cet énoncé, très obscur, m'est communiqué par M. De Tilly, qui l'a copié exactement. J'ignore si, en effet, le problème a été proposé par Fermat. Euler, et beaucoup d'autres géomètres, se sont occupés des *carrés magiques*, sur lesquels Frénicle a composé un Traité complet.

(E. C)

point commun à trois surfaces du second ordre; 2° la détermination des points d'inflexion des cubiques, qui a été l'origine des recherches d'Aronhold sur les formes algébriques; 3° ses recherches sur les bitangentes des quartiques. Presque tous les écrits de Hesse ont été publiés dans le Journal de Crelle (BORCHARDT, *Journal de Crelle*, t. 79, p. 345-347). (P.M)

III.

B. TORTOLINI.

Barnabé Tortolini est né à Rome, le 19 novembre 1808. Après avoir fait de brillantes études dans sa ville natale, il embrassa l'état ecclésiastique ; puis devint, successivement, professeur de Physique mathématique, de Mécanique et de Calcul infinitésimal à l'Université de Rome. Ses nombreux travaux mathématiques, principalement sur la théorie des intégrales elliptiques, le firent nommer membre, associé ou correspondant des Académies de Rome, Naples, Bologne, Modène, Upsal, etc. Il est mort le 24 août 1874.

Il a rendu le plus grand service aux mathématiciens italiens par la fondation du recueil connu, de ce côté-ci des Alpes, sous le nom d'Annales de Tortolini (*Annali di scienze matematiche e fisichè*, 1850-1857; *Annali di matematica pura ed applicata*, 1858-1865). La liste complète de tous les écrits de Tortolini, au nombre de 110, se trouve à la fin de la Notice à laquelle nous empruntons les détails qui précèdent (V. DIORIO, *Intorno alla vita ed ai lavori di monsignore D. Barnaba Tortolini*. Estratto dagli Atti dell' Academia pontificia de' Nuovi Lincei. Anno XXVIII. Sessione 1ª del 20 Dic. 1874, 14 p. in 4°). (P. M)

Note. B. Tortolini applaudit à mes premiers essais, et me témoigna constamment une grande bienveillance. Quelques mois avant sa mort, frappé de paralysie, il me fit écrire, par son secrétaire, une affectueuse lettre, accompagnée de sa photographie. J'ai le regret de n'avoir pas connu personnellement ce remarquable géomètre, qui devait être un excellent homme. (E. C)

BIBLIOGRAPHIE.

VI.

Les numéros de juillet à décembre 1874, du *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, de M. B. Boncompagni, contiennent, outre la liste des publications récentes, les écrits suivants :

1° Un *Mémoire sur la vie et les travaux de Andalo di Negro* et de quelques autres cosmographes génois, par C. de Simoni, avec un catalogue des écrits de Andalo di Negro, par B. Boncompagni (p. 313-376). Andalo di Negro, né vers 1360, mort en 1440, appartenait à une famille célèbre de Gênes, qu'il illustra encore par ses connaissances astronomiques et par les progrès qu'il fit faire à la Géographie. Il voyagea beaucoup, fut poète et peut-être helléniste. Boccace raconte que c'est Andalo di Negro qui lui a appris l'Astronomie. Le catalogue des écrits du savant génois, dont le plus grand nombre se rapporte à l'astrolabe, a été fait, avec beaucoup de soin, par M. Boncompagni. Trois de ces écrits ont été publiés en 1475, dans un volume très rare ; les douze autres sont inédits. M. Boncompagni fait connaître les Bibliothèques, publiques ou privées, où l'on peut trouver cette édition de 1475 et les manuscrits.

2° Un *Mémoire* de F. Jacoli *sur deux écrits de Raffaele Gualteroti de Florence* touchant une étoile nouvelle qui apparut en 1604, avec des lettres inédites de ce contemporain de Galilée (p. 377-405). Ce mémoire contient beaucoup de particularités curieuses sur les idées astronomiques de l'époque.

3° Une *Notice historique sur les fractions continues*, depuis le XIIIe siècle jusqu'au XVIIe, par A. Favaro, professeur à l'Université de Padoue (p. 451-502, 533-589). Cet écrit, qui est très intéressant, se trouvait entre les mains de M. Boncompagni avant la notice analogue de S. Gunther (*Bulletino*, 1874, p. 213-254). Une Notice de celui-ci, sur deux méthodes d'approximation des quantités irrationnelles, se trouve à la suite de l'article de M. Favaro (p. 590-596).

P. M.

TABLE DES MATIÈRES.

COURBES ET SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE.

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

PAGES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ; CALCUL INTÉGRAL ; THÉORIE DES SÉRIES.

MÉCANIQUE.

CALCUL DES PROBABILITÉS.

QUESTIONS.

ERRATA.

P. 9, l. 8, lire : *ces périodes*, au lieu de *périodes*.

13, l. 4, lire : $\cos 3x + \ldots$, au lieu de $\cos 3x \ldots$

16, l. 21, lire : y_1, au lieu de y^1.

61, l. 11, lire : *lui-même*, au lieu de *liu-même*.

63, l. 27, effacer 3.

66, l. 15, lire $3Rr^2$, au lieu de $3R^2r$.

66, l. 19, lire T^5, au lieu de T.

82, l. 3, lire $\bar{4}$, au lieu de 4.

96, l. 2, lire 28bis, au lieu de 28.

99, l. 1, lire $\overline{AB}$, au lieu de —AB

120, l. 4, lire PE..., PE'..., au lieu de PB..., PB'....

120 et 121, remplacer partout C, quand il désigne un point, par D.

128, l. 27, lire $\alpha\gamma$, au lieu de $\alpha\beta$.

158, l. 29, lire *ne peuvent être négatives toutes deux*, au lieu de *ne peuvent être de même signe*.

162, l. 32, lire 66, au lieu de 67.

